

## 海岸工学分野における数値波動水槽の研究・開発について

名古屋大学大学院工学研究科社会基盤工学専攻 川崎 浩司 (Koji Kawasaki)  
Department of Civil Engineering, Graduate School of Engineering  
Nagoya University

### 1. はじめに

沿岸災害や海域環境の総合的対策を講じるためには、対象海域における物理環境場の機構を精緻に解明することが必須である。これまで、沿岸域の海象場を明らかにすることを目的に、理論、水理模型実験、数値計算を活用しながら、多数の研究が系統的に行われてきた。しかし、沿岸域の物理環境場は、風、波浪、流れ、漂砂、構造物などの固相・気相・液相の多相場が複雑に絡み合っており、未解明な現象が現在もなお存在している。

近年、高速演算機器の性能向上と高精度な計算スキームの開発に伴い、海岸・水工学分野においても、理論や水理模型実験に代わる一手段として、数値計算により複雑な流動場を解析・研究する学問である数値流体力学の重要性が認識されつつある。最近では、流体の支配方程式を直接計算することで、強非線形かつ非定常な物理現象をより精緻に解明しようとする試みが行われており、今後より一層、数値流体力学の役割が高まるものと考えられる。

本稿では、著者ら(1996~1999)が構築してきた無反射造波機能を有する数値波動モデルを通じて VOF 法 (Volume Of Fluid) の概念と、実務設計に活用されつつある数値波動水路 CADMAS-SURF (SUper Roller Flume for Computer Aided Design of MAritime Structure) の適用例を説明する。さらに、著者ら(2001~2002, 2005~2008)が開発した 2 次元/3 次元固気液多相乱流数値モデル DOLPHIN-2D/3D (Dynamic numerical model Of muLti-Phase flow with Hydrodynamic INteractions-2/3 Dimension version) についても紹介する。

### 2. VOF 法に基づく自由表面流体解析モデル

#### 2.1 格子法における自由表面流体解析モデルの概要

流体解析モデルは主に格子法と粒子法の 2 種類に分類される。格子法は、基礎方程式を離散化する際、格子を使用する方法で、粒子法は格子を用いずラグランジュ的に粒子(計算点)を追跡する方法である。さらに、格子法における自由表面を含む流体解析では、時空間的に変化する自由表面の表現方法に工夫する必要がある。自由表面形状を決定する方法として、表 2.1 に示すように、(a)直接的に自由表面を追跡する界面追跡法、(b)間接的に自由表面を追跡するためのモデルを導入した界面捕捉法の 2 種類に大別される。

表 2.1 格子法における自由表面解析手法の分類

(a)界面追跡法 (直接的界面表現)	(b)界面捕捉法 (間接的界面表現)
ラグランジュ法, ALE 法, BFC 法など	(1)高さ関数を用いる方法 (2)マーカー粒子による方法 (3)移流方程式を用いる方法

前者に代表される方法として、ラグランジュ法がある。しかし、ラグランジュ法では、計算点が大きく歪む場合、計算が不安定になるといった欠点がある。その欠点を回避するため、格子点の移動速度を考慮しつつ、物理量の時間変化をラグランジュ的にもオイラー的にも評価可能な ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) 法が提案された。その他にも、境界適合座標を用いた BFC (Boundary-Fitted Coordinate) 法などがある。しかし、界面追跡法では、格子点の間隔が著しく歪んだ場合、計算が不安定になり精度も悪化するため、砕波のように自由表面が複雑に変化し不連続になる場合には適用できなくなる。一方、後者の界面捕捉法に関しては、主に(1)高さ関数を用いる方法、(2)マーカー粒子による方法、(3)流体の体積率に相当する関数の移流方程式を用いる方法に分類される。(1)の方法は、自由表面が一価関数のとき、有効であるが、砕波や流体内部に気泡が存在する場合など自由表面が多価関数になるとき、適用不可能となる。(2)の方法は、自由表面を直接定義する代わりに、流体が占めている領域に流体運動に何も影響を与えない仮想粒子(マーカー粒子)を設置し、マーカー粒子を含む領域と含まない領域の境界が自由表面であると定義する方法で、マーカー粒子の運動は流体運動により決定される。しかし、マーカー粒子の取り扱いに煩雑さがあり、特に3次元計算においては困難を有すると考えられる。そこで、マーカー粒子による方法の利点を活かしつつ、(2)の方法で欠点となっていた計算の煩雑さがほとんどなく、3次元への拡張が容易な方法として、(3)の方法が挙げられる。この方法は、格子ごとに流体の体積率に相当する関数を定義し、その関数の移流方程式を解くことにより自由表面を模擬するものであり、多くの問題に適用可能である。この種の方法として、近年、自由表面流体解析によく使用されている Nichols et al.(1980), Hirt and Nichols(1981)が開発した VOF (Volume Of Fluid) 法がある。しかし、VOF 法では、界面勾配の輸送が考慮されておらず、複雑な界面挙動を十分な精度で捕獲できないといった問題点があった。そこで、同問題を克服するために、功刀(1997)は、Youngs(1982)が考案した PLIC (Piecewise Linear Interface Calculation) 法の特徴を活かしつつ、質量と体積の保存性を確保した手法として、MARS (Multi-interface Advection and Reconstruction Solver) を開発した。また、密度関数法として、Yabe and Aoki(1991)が提案した高精度移流計算手法 CIP (Cubic Interpolated Propagation, 現在では Constrained Interpolation Profile) 法、Sussman et al.(1994)が開発した気液界面からの符号付き距離関数 (Level Set 関数) を用いた Level Set 法などがある。

本章では、川崎ら(1996~1999)が開発した無反射造波機能を有する VOF 法に基づく数値波動モデルを通じて、VOF 法の基本概念について説明する。また、ソースプログラムが一般公開されている VOF 法を用いた数値波動水路 CADMAS-SURF (財団法人沿岸開発技術研究センター, 2001; 財団法人沿岸技術研究センター, 2008) の越波現象への適用例についても紹介する。

## 2.2 無反射造波機能を有する VOF 法に基づく数値波動モデル

### 2.2.1 基礎方程式

2次元波動場に対する基礎方程式は、非圧縮性粘性流体に対する連続方程式(2.1), Navier-Stokes 運動方程式(2.2), (2.3), 自由表面の挙動を模擬するための流体の体積率を表す VOF 関数  $F$  の保存方程式(2.4)から構成される。なお、本計算では計算領域に造波ソースと付加減衰領域を設けているため、式(2.1), 式(2.3), 式(2.4)の右辺に、これらに関連する付加項が含まれている。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = q \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial q}{\partial z} - \gamma w \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial (uF)}{\partial x} + \frac{\partial (wF)}{\partial z} = Fq \quad (2.4)$$

$$q = \begin{cases} q^*(z, t) / \Delta x_S & (x = x_S) \\ 0 & (x \neq x_S) \end{cases} \quad (2.5)$$

ここで、 $x$  は水平軸、 $z$  は静水面を原点とし上向きを正とする鉛直軸である。 $u$ 、 $w$  はそれぞれ  $x$ 、 $z$  方向の流速成分、 $p$  は圧力、 $g$  は重力加速度、 $\rho$  は流体密度、 $\nu$  は動粘性係数、 $t$  は時間である。 $\gamma$  は付加減衰領域で必要となる正値の減衰係数を表し、付加減衰領域以外の解析対象領域では  $\gamma$  の値を 0 としている。 $q$  は造波ソースを示し、式(2.5)のように表現できる(川崎, 1998)。 $q^*$  は造波測線  $x=x_S$  でのわきだし強さで、 $\Delta x_S$  は  $x=x_S$  での  $x$  方向の格子間隔である。

## 2.2.2 計算アルゴリズム

図 2.1 に示すとおり、まず静水深、入射波条件、構造物の幾何形状などの初期条件を設定する。そして、自由表面や壁面における流速の境界条件を満足するように Navier-Stokes 方程式(2.2)、(2.3)を解くことにより、次の時間ステップの流速を計算する。しかし、運動方程式から得られた流速値は必ずしも連続方程式(2.1)を満足していないため、流速と圧力を調整しながら連続方程式を満たすまで繰り返し計算を行う必要がある。本計算では SOLA (numerical SOLution Algorithm for transient fluid flow) スキームを採用した(Hirt et al., 1975; 川崎, 1998)。ついで、連続方程式を満足させた流速値を用いて、VOF 関数  $F$  の保存方程式を計算し、自由表面形状を決定する。

上述の計算フローを、適切な境界条件の下、繰り返すことにより、波動場の時系列計算を行うことができる。

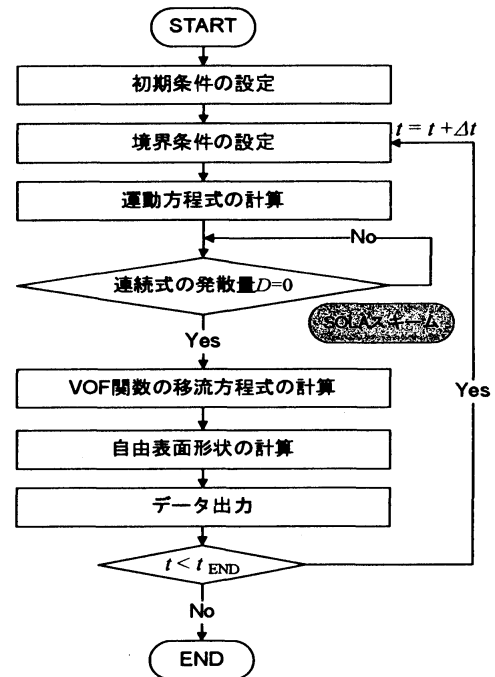


図 2.1 計算フローチャート

## 2.2.3 VOF 法による自由表面解析

### (a)VOF 法の基本概念

まず、VOF 法の基本的な概念について述べる。流体中に存在するある物理量  $F$  を時間的に追跡する、つまり  $F$  をラグランジュ的に捉えるための方程式は、一般に次のように表すことができる。

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + w \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad (2.6)$$

物理量  $F$  を、 $F=0$ 、 $1$  をそれぞれ気体、流体を表すと仮定すると、式(2.6)の  $F$  は一見流体の体積率を表現しているように考えられる。しかし、式(2.6)が意味することは、 $F=0$  あるいは  $F=1$  という物理量が流速  $u$ 、 $w$  で輸送されることのみを示し、必ずしも 0 と 1 である必要がなく、単なる気体と流体を区別する指標にすぎない。つまり、式(2.6)は流体粒子の挙動を表すが、自由表面上の点を直接計算するものでなく、 $F=0$  と  $F=1$  の間に自由表面の存在が分かるのみであり、式(2.6)による  $F$  は流体の体積率として考えることができない。

そこで、 $F$ を流体の体積率とみなすために、式(2.1)を用いて式(2.6)を保存形表示すると、式(2.4)となる。なお、本計算では計算領域内に造波ソースがあるため、式(2.5)からわかるように、Nichols et al.(1980)や Hirt and Nichols(1981)が開発したオリジナルVOF法と異なり、式の右辺に造波ソースによる項 $Fq$ が付加されている。以上のことから、式(2.4)は流体領域だけでなく、解析領域全域に用いることができる。つまり、 $F$ の値 (VOF関数)により、 $F=0$ のとき気体セル、 $F=1$ のとき流体セル、 $0<F<1$ のとき表面セルとして表現することが可能になり、図2.2に示すように、VOF法によって自由表面形状をモデル化することができる。なお、表面セルをVOF関数の値のみで $0<F<1$ と定義すると、境界処理の際に不都合になる場合が生じるため、表面セルはVOF関数の値だけで判断せずに、必ず気体セルに隣接するという条件を課すことにする。

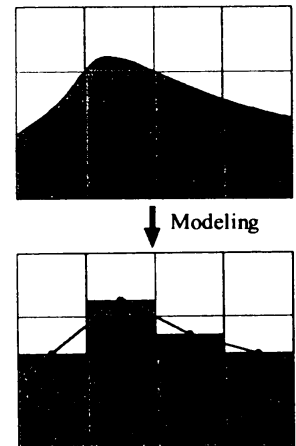


図2.2 自由表面のモデル化

### (b)donor-acceptor 法

自由表面の形状を精度よく追跡するためには、工夫が必要である。そのため、VOF法では、VOF関数の保存方程式(2.4)中の移流項の取り扱いに donor-acceptor 法を採用している。donor-acceptor 法とは、移流により移動するVOF関数 $F$ の値が donorセル (風上側セル) と acceptorセル (風下側セル) の $F$ の値によって決定される方法で、特に、風下側の自由表面形状と移流で運ばれる流体の形状の連続性に注意して、VOF関数 $F$ の値を決めるところに特徴がある。

前述したように、表面の向きはいずれかの座標軸に垂直な方向として決まるため、表面の向きとVOF関数 $F$ の移流面との関係は平行か垂直かのどちらかである。このことを考慮して、移流面でのVOF関数 $F$ を決定する。図2.3(a)に示すように、移流面と donorセルの自由表面が垂直の場合、移流面におけるVOF関数 $F$ の値は風上側のVOF関数 $F$ の値に一致させる。一方、図2.3(b)に示す移流面と donorセルの自由表面が平行の場合は、移流面におけるVOF関数 $F$ の値を acceptorセルのVOF関数 $F$ の値とみなす。しかし、この場合、決定される移流量によっては、donorセルに十分な流体または気体がない場合が生じる。例えば、図2.3(b(3))に示すように、donorセルに移流面で気体を移流させるための気体が十分に存在しない場合であり、図からもわかるように、その不足分は流体を移流させるべきである。また、移流面で流体を移流させるのに十分な流体が donorセルに存在しない図2.3(b(4))の場合は、その不足分として気体を移流させる必要がある。

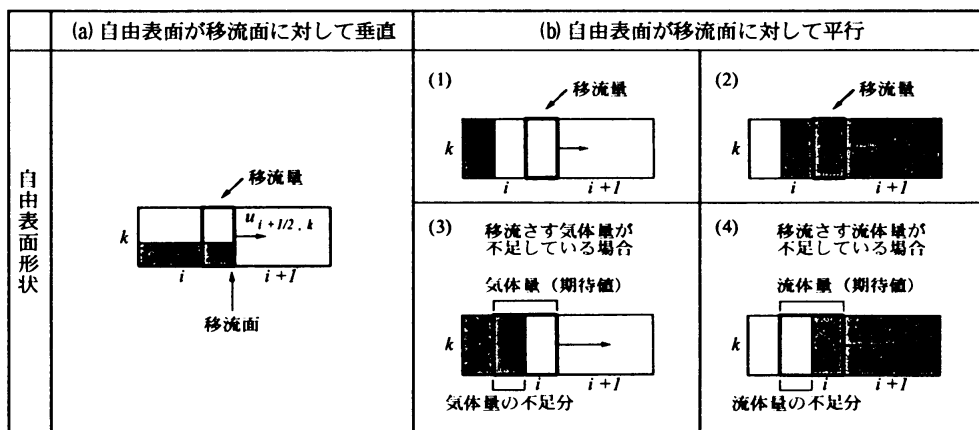


図2.3 VOF関数 $F$ の移流方法

以上のことをすべて考慮した VOF 関数  $F$  の移流方程式の差分式は式(2.7)で表される。

$$F_{i,k}^{n+1} = F_{i,k}^n - \left( \frac{RX_{i+1/2,k} - RX_{i-1/2,k}}{\Delta x_i} + \frac{RZ_{i,k+1/2} - RZ_{i,k-1/2}}{\Delta z_k} - F_{i,k}^n q_{i,k}^n \Delta t \right) \quad (2.7)$$

$$\text{ここで, } RX_{i,k} = \text{sign}(u_{i,k}^{n+1}) \cdot \min \left\{ F_{AD} |u_{i,k}^{n+1} \Delta t| + CFX, F_D \Delta x_D \right\} \quad (2.8)$$

$$RZ_{i,k} = \text{sign}(w_{i,k}^{n+1}) \cdot \min \left\{ F_{AD} |w_{i,k}^{n+1} \Delta t| + CFZ, F_D \Delta z_D \right\} \quad (2.9)$$

$$CFX = \max \left\{ (1 - F_{AD}) |u_{i,k}^{n+1} \Delta t| - (1 - F_D) \Delta x_D, 0 \right\} \quad (2.10)$$

$$CFZ = \max \left\{ (1 - F_{AD}) |w_{i,k}^{n+1} \Delta t| - (1 - F_D) \Delta z_D, 0 \right\} \quad (2.11)$$

式(2.8), 式(2.9)中の  $\min$  は donor セルが保有する流体以上の流体が移動するのを防ぎ, 式(2.10), 式(2.11)中の  $\max$  は donor セルが保有する気体以上の気体が移動するのを防ぐことを意味する。添字の  $D$  は donor セルを, また, 添字  $AD$  は donor セルのフラッグ  $RF$  により, acceptor セル  $A$  か donor セル  $D$  のいずれかになる。前述したように, donor セルが表面セルであれば, その表面の向きにより  $AD$  が決定できる。一方, donor セルが流体セルあるいは気体セルの場合には,  $AD$  は acceptor セルになる。

### (c)開境界条件

本モデルでは, 図 2.4 に示すような付加減衰領域 (Added Dissipation Zone) を解析対象領域の端に接続し, 付加減衰領域内でメッシュ間隔を変化させながら鉛直方向の流速を Stokes の抵抗則に基づいて徐々に減衰させることにより波動を吸収する方法 (Hinatsu, 1992) を採用した。このため,  $z$  方向の運動方程式(2.3)の右辺にエネルギー減衰項となる  $-\gamma w$  の項を付け加える必要がある。

なお,  $x$  方向の運動方程式に同様な減衰項を付加しないのは,  $x$  方向の一様流に対して減衰を避けるためである。減衰係数  $\gamma$  は, 図 2.4 に示すように, 水平  $x$  方向に対して解析対象領域と付加減衰領域の接続線から付加減衰領域の端まで正弦的に増加させ, 鉛直  $z$  方向に対して底面から自由表面まで 0 から 1 へと線形的に増加させることにより, その値を決定した。また, 付加減衰領域の岸・沖側末端における開境界条件としては, 流速や VOF 関数などすべての物理量  $\phi$  の水平勾配が 0 となる条件を課した。

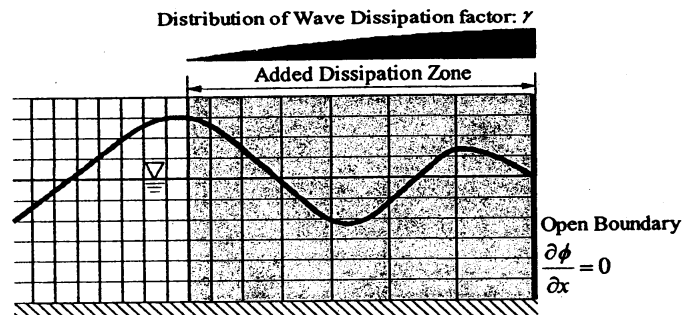


図 2.4 付加減衰領域による開境界処理

## 2.3 数値波動水路 CADMAS-SURF

本節では, 近年, 海岸構造物の耐波設計に利用されつつある数値波動水路 CADMAS-SURF を, 過去に越波災害を被った現地海岸に適用し, 護岸の断面形状や天端高を変化させた越波解析を行うことにより, 対象地域の特性に適合した越波対策工法を検討した例について紹介する (川崎ら, 2007a ; 2007b)。なお, 数値波動水路 CADMAS-SURF の詳細については, 磯部ら(1999), 財団法人沿岸開発技術研究センター(2001), 数値波動水路の耐波設計への適用に関する研究会(2002), 財団法人沿岸技術研究センター(2008)などを参照されたい。

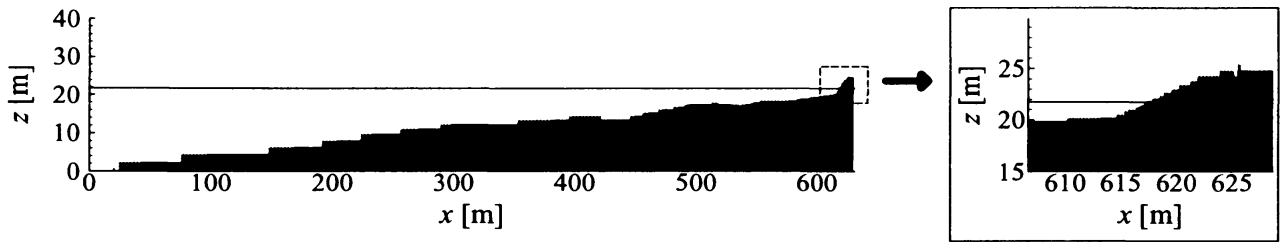


図 2.5 計算対象領域の海底地形と現況の護岸形状

### 2.3.1 計算条件

図 2.5 は解析対象断面の海底地形および現況の護岸形状を示しており、約 1/30 の比較的緩やかな勾配の海底地形の岸側に、消波ブロックを有する天端高 EL+5.34m の護岸が設置されている。

表 2.2 に解析で使用した各パラメーターを示す。本計算では、海岸護岸周辺の越波状況を高精度かつ効率的に解析できるように、不等間隔格子を採用した。基礎方程式の移流項の差分には、1 次精度風上差分と 2 次精度中央差分のハイブリッド差分法を使用した。そして、両者の比率を示す VP-DONOR の値を変化させた試行計算の結果に基づき、VP-DONOR=0.5 を用いた。

越波量は、越波升を護岸背後に設けることで求めた。具体的には、水塊が護岸背後に越波・越流することによって、越波升内の VOF 関数  $F$  の面積積分値が変化するため、初期値からの増分量を求め、これを越波量とした。

表 2.2 解析条件

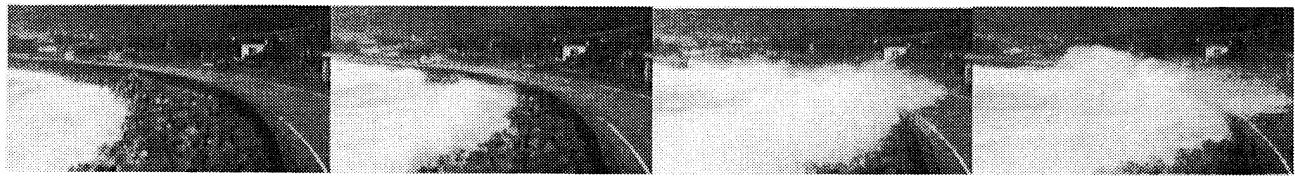
格子間隔	水平・鉛直方向	0.2~2.0m
計算時間	時間間隔	0.001
	終了時間	200s
移流項の差分	VP-DONOR	0.5
TimerDoor 法	気泡上昇速度	0.2m/s
	水滴落下速度	3.0m/s
境界条件	流速・圧力	Slip
	VOF 関数 $F$	Free
消波工	空隙率	0.5
	慣性力係数 $C_M$	1.2
	抗力係数 $C_D$	1.0

### 2.3.2 現況護岸に対する越波再現計算

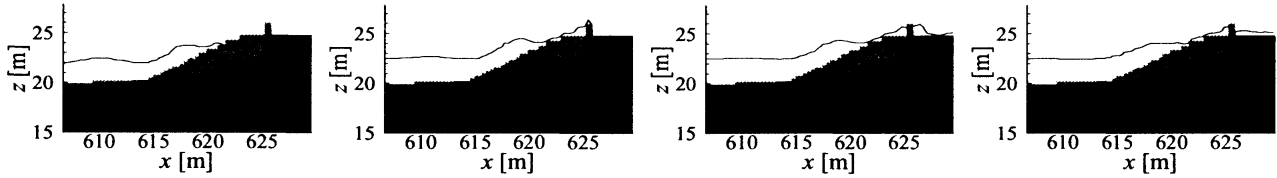
図 2.5 に示す現況断面での越波状況を把握するため、越波を記録した台風時を対象に再現計算し、越波流量を算定した。入射条件は波高  $H=4.5\text{m}$ 、周期  $T=12.0\text{s}$  である。図 2.6 は台風時にビデオカメラによって記録された越波画像と計算結果を比較したものである。図 2.6(a) に示す画像から、消波ブロックに沿って水位上昇が生じ、越波水塊が山側の道路車線まで達している様子が確認できる。一方、図 2.6(b) に示す計算結果でも、波浪来襲時に水塊が消波ブロックに沿って打ち上がり、護岸天端上を流れる様子がみられることから、数値波動水路は実際の越波状況を良好に再現しているといえる。また、平均越波流量を求めたところ、 $10^2\text{m}^3/\text{m/s}$  オーダーとなった。一方、合田の算定図から求められる越波流量は  $10^4\text{m}^3/\text{m/s}$  オーダーであり、土木工事設計要領（沖縄総合事務局開発建設部，2004）で定められている許容越波流量  $1.0 \times 10^3\text{m}^3/\text{m/s}$  を下回っている。しかし、実際には台風来襲時に当該地域で通行規制が行われており、車両通行に危険性があると判断されるほどの越波が発生していることから、計算結果の方が実現象を再現していると考えられる。

### 2.3.3 越波対策工法の検討

図 2.7 に越波対策工法の選定方法の概要を示す。越波対策工法として、図 2.8 に示すように、沖合 50m に離岸堤を有する直立堤、消波ブロック被覆式護岸、半円弧状護岸の 3 断面を取り上げた。



(a)ビデオ画像



(b)再現計算結果

図 2.6 台風時の越波状況

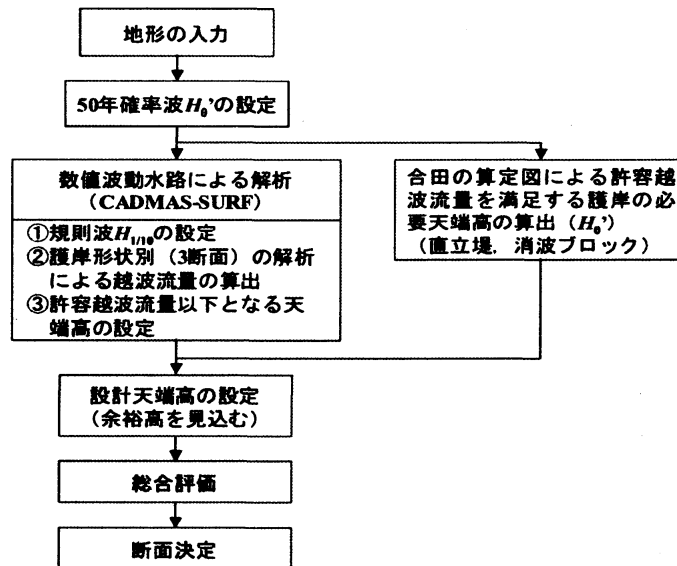


図 2.7 越波対策工法の選定方法

設計波高は 50 年確率波とし、波高  $H=6.2\text{m}$ 、周期  $T=15.39\text{s}$  を入射させた。ここでは、数値波動水路による解析結果だけでなく、合田の算定図によって得られた天端高も参考にすることにより、余裕高を含む設計天端高を決定することとした。さらに、天端高の設定のみならず、各断面における工事費や海域環境への影響なども考慮した総合的な評価により、護岸形状の選定を行った。

設計天端高を決定するために、3 形状の護岸に対して護岸天端高を  $1.0\text{m}$  単位で変化させて数値解析を行った。図 2.8 に各断面での護岸周辺における水面波形の空間変化を例示する。同図から、(a)では離岸堤設置の効果による進行波の減衰、(b)では消波ブロック内での進行波の消散効果、(c)では特殊断面形状による沖合への波返しがみられ、数値波動水路によって各護岸形状の特徴が計算できていることがわかる。

数値波動水路によって算出した各断面の天端高と越波流量の関係図を用いて、許容越波流量  $1.0 \times 10^3 \text{m}^3/\text{m/s}$  以下となる必要天端高を求めたところ、離岸堤を有する直立堤では  $\text{EL}+6.6\text{m}$ 、消波ブロック被覆式護岸では  $\text{EL}+7.5\text{m}$ 、半円弧状護岸では  $\text{EL}+6.6\text{m}$  となった。したがって、計算結果より、前面に離岸堤を有する直立堤と半円弧状護岸は、消波ブロック被覆式護岸よりも天端高を

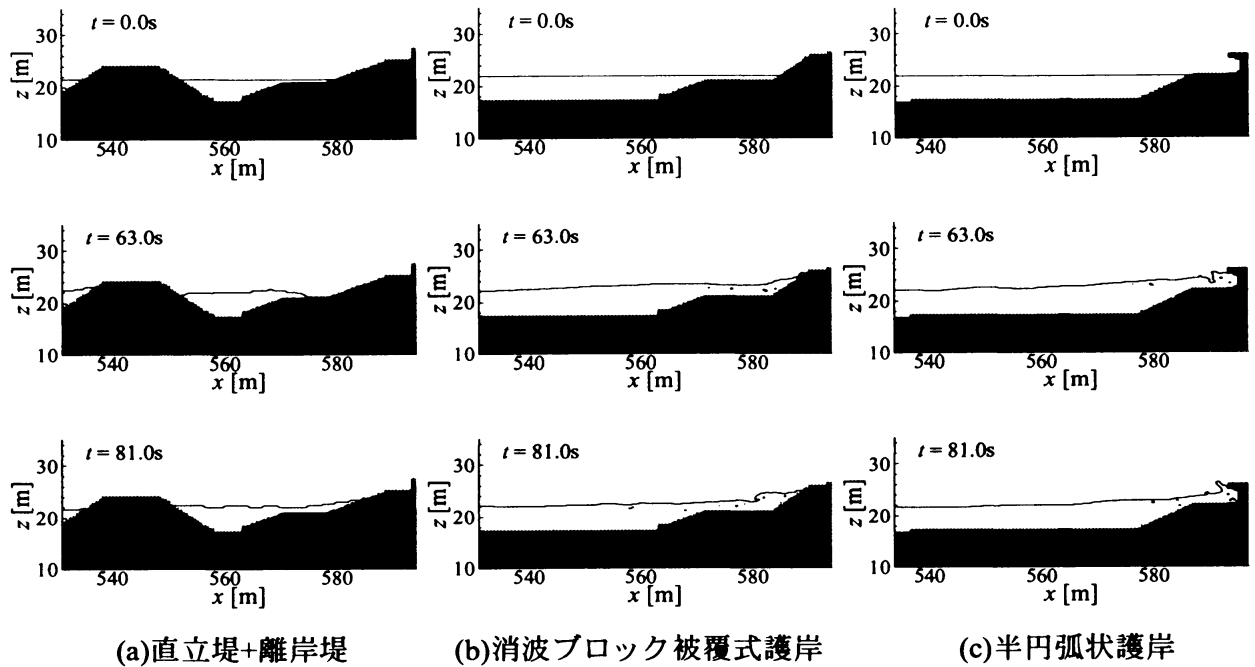


図 2.8 数値波動水路 CADMAS-SURF による各種護岸に対する越波計算

表 2.3 越波低減のための最低天端高の比較および設計天端高の決定

現況護岸天端高	直立堤+離岸堤		消波ブロック被覆式護岸		半円弧状護岸
	数値計算	合田の算定図 <sup>*1</sup>	数値計算	合田の算定図	数値計算
EL+5.34m	EL+6.60m	EL+11.90m	EL+7.50m	EL+8.10m	EL+6.60m
	設計天端高 EL+7.5m		設計天端高 EL+8.0m		設計天端高 EL+7.5m

\*1 直立堤前面の離岸堤は考慮していない

低く抑えられることがわかった。さらに、離岸堤を有する直立堤と消波ブロック被覆式護岸に関して、表 2.3 に示すように、合田の算定図から求めた必要天端高は計算値を上回っている。特に、離岸堤を有する直立堤に対し、合田の算定図では、沖合に設置された離岸堤を考慮できないため、離岸堤による消波効果が反映されていない。このことから、特殊形状を有する構造物や複雑な海底地形を対象とする場合、数値波動水路の有用性がより発揮されるといえる。

堤防天端高の設定においては、海岸保全施設技術研究会(2004)によると、若干の不確実性を考慮し、最大 1.0m 程度を限度とする余裕高を設定した方がよいとされている。そこで、越波の現況や護岸背後の状況、合田の算定図によって得られた結果などを勘案し、表 2.3 に示すように、余裕高を含む最終的な設計天端高を、離岸堤を有する直立堤では EL+7.5m、消波ブロック被覆式護岸では EL+8.0m、半円弧状護岸では EL+7.5m として比較を行った。

各護岸の概算工事費、検討地域の特性を踏まえた施工性、海岸環境、完成後の景観などを考慮し、越波対策工法の総合評価を各護岸に対して行った。概算工事費を算出した結果、検討箇所での施工では、半円弧状護岸が最も低く費用を抑えられ、経済的であることがわかった。また、他の工法と比較して、半円弧状護岸は海岸環境への影響が小さい断面形状のため、景観・環境面に優れた特徴を有しており、さらに消波ブロック被覆式護岸よりも天端高を低く抑えられる。よって、検討箇所では半円弧状護岸が最も適合した越波対策工法であると推定される。



以上から、従来、合田の算定図では解析できなかった複雑な海底地形や特殊形状護岸に対する越波流量を適切に算定することができることを示した。さらに、計算結果に基づき、各種護岸形状に対して総合的に評価することにより、経済的で景観や環境面にも優れた護岸断面の提案が可能となった。以上のことから、対象地域の特性に適した越波対策工法の選定検討に、数値波動水路 CADMAS-SURF が活用できるといえる。

### 3. 固気液多相乱流数値モデル DOLPHIN

著者がこれまで系統的に開発してきた、固相・気相・液相の相互干渉を考慮できる固気液多相乱流数値モデル DOLPHIN の概要について説明するとともに、その計算例を紹介する。

#### 3.1 基礎方程式

基礎方程式は、圧縮性粘性流体に対する質量保存式(3.1)、運動方程式(3.2)、圧力方程式(3.3)、異相間の割合を示す密度関数の移流方程式(3.4)、バロトロピー流体に対する状態方程式(3.5)から構成される。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{F} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p = -\rho C_s^2 \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \phi_I}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi_I = 0 \quad (3.4)$$

$$\rho = f(p) \quad (3.5)$$

ここで、 $\rho$ は流体密度、 $\mathbf{u}$ は流速ベクトル、 $p$ は圧力、 $\mathbf{F}$ は粘性項、重力項、乱流項などの外力ベクトル、 $C_s$ は局所音速、 $t$ は時間を示す。また、 $\phi_I$ はセル内に $I$ 相( $I=1\sim 3$ ;  $\phi_1$ :固相,  $\phi_2$ :液相,  $\phi_3$ :気相)が占める割合であり、 $\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 1$  ( $0 \leq \phi_I \leq 1$ )の関係を満たす。

#### 3.2 計算アルゴリズム

本モデルでは、以下に示すように、時間分離解法を用いて、基礎方程式のうち質量保存式(3.1)、運動方程式(3.2)、圧力方程式(3.3)を移流段階と非移流段階に分割して計算を行う。ここで、非圧縮・圧縮性流体解析 C-CUP 法 (CIP-Combined Unified Procedure) (Yabe and Wang, 1991) では、非移流段階を解いた後、移流段階の計算を行っている。しかし、移流段階→非移流段階の順序で計算した方が質量の保存性がよいといった報告 (Yabe, 1997) があり、本モデルでは、移流段階計算後、非移流段階を解くこととした。また、非移流段階に対しては、C-CUP 法と異なり、非圧縮性流体解析 SMAC (Simplified Marker and Cell) 法の利点を活かしながら圧縮性流体まで拡張・展開した手法を構築し、同手法を用いて解析を行う。なお、基礎方程式の離散化・差分化は不平等間格子に基づいて行った。

【移流段階】

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = 0 \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p = 0 \quad (3.8)$$

【非移流段階】

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^*}{\Delta t} = -\rho^* \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} \quad (3.9)$$

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho^*} \nabla p^{n+1} + \mathbf{F}^* \quad (3.10)$$

$$\frac{p^{n+1} - p^*}{\Delta t} = -\rho^* C_s^2 \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} \quad (3.11)$$

ここで、 $\Delta t$ は時間ステップ間隔、 $n+1$ は時刻 $(n+1)\Delta t$ における物理量、 $*$ は移流項計算後の物理量を示す。

図 3.1 に、多相乱流数値モデル DOLPHIN の計算フローチャートを示す。まず初期条件と境界条件を設定した後、物理量の移流計算を高精度移流計算スキーム CIP 法 (Yabe and Aoki, 1991) により行う。ついで、非圧縮性・圧縮性流体を同時解析可能な拡張 SMAC 法を用いて、非移流段階における各物理量を求める。なお、気液界面で生じる表面張力を、Brackbill et al.(1992)が考案した CSF (Continuum Surface Force) モデルにより算定した。また、乱流量を、LES (Large Eddy Simulation) モデルによって評価した。非移流段階の計算後、次節で述べる複数剛体の運動解析法により各固相の移流速度  $U_i$  を求める。その後、密度関数  $\phi_i$  の移流計算を、固相  $\phi_1$  に対しては  $U_i$  を用いて、液相  $\phi_2$ 、気相  $\phi_3$  には  $U_i$  を考慮した修正流速を使って CIP 法により計算する。また、式(3.5)に示すバロトロピー流体の仮定の下で各相の音速を求め、密度関数を用いて各格子での局所音速  $C_s$  を算定した。粘性係数に関しても密度関数を利用して求めた。最終的に各物理量を更新し、次の時間ステップへ移行する。

上述の計算過程を時間ステップごとに繰り返し実施することにより、異相間の相互干渉を考慮した複数物体が混在する多相流体場の数値解析を行うことが可能となる。

### 3.3 拡張 SMAC 法による非移流段階計算

式(3.9)~式(3.11)からわかるように、同式から次の時間ステップにおける物理量を陽的に求めることはできない。そこで、SMAC 法と同様、運動方程式の離散化において、流速の予測値  $\tilde{\mathbf{u}}$  を導入する。

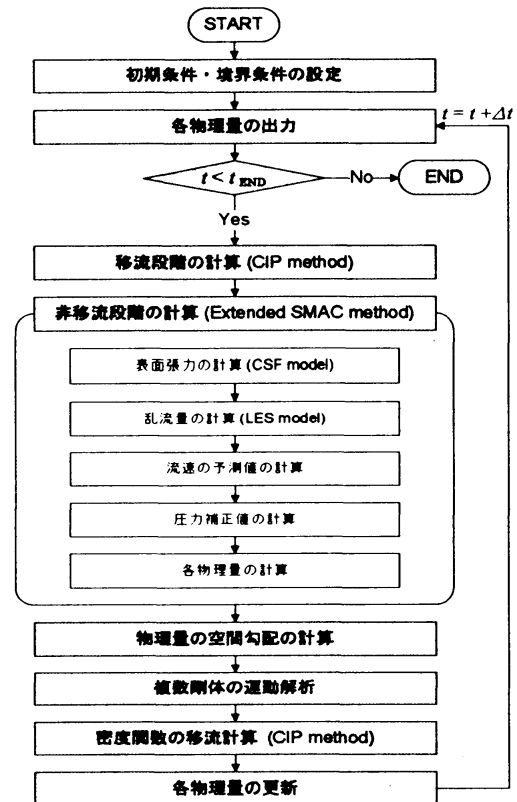


図 3.1 計算フローチャート

まず、次に示すように、移流段階計算後の物理量を用いて、流速の予測値  $\tilde{\mathbf{u}}$  を算定する。

$$\frac{\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho^*} \nabla p^* + \mathbf{F} \quad (3.12)$$

式(3.10)から式(3.12)を引いた式と式(3.11)を用いて、 $\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1}$  を消去することにより、式(3.13)に示す圧力補正值  $\delta p$  に関する連立一次方程式を誘導することができる。

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho^*} \nabla \delta p \right) = \frac{1}{\rho^* C_s^2 \Delta t^2} \delta p + \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} \quad (3.13)$$

ここで、 $\delta p = p^{n+1} - p^*$  である。

式(3.13)から、局所音速  $C_s$  が大きい場合、つまり流体の非圧縮性が仮定される場合には、右辺第一項は他項に比べて微小となるため自動的に無視される。このことは、本数値解法が圧縮性流体場を対象とした手法でありながら、局所音速を利用することにより、非圧縮性流体も同時に解くことができることを示す。

最後に、式(3.13)から算定された  $\delta p$  を使って、次の時間ステップにおける物理量を次式より求める。

$$\mathbf{u}^{n+1} = \tilde{\mathbf{u}} - \frac{\Delta t}{\rho^*} \nabla \delta p \quad (3.14)$$

$$p^{n+1} = p^n + \delta p \quad (3.15)$$

$$\rho^{n+1} = \rho^* - \rho^* \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} \Delta t \quad (3.16)$$

### 3.4 複数剛体の運動解析

本モデルでは、Xiao et al.(1997)と同様、複数剛体に対して独立に運動解析ができるよう、従来の単数剛体の運動解析法に個々の剛体に対する固相密度関数  $\phi_l$  を導入する。なお、1つのセル内における固相の密度関数  $\phi_l$  と各剛体に対する  $\phi_l$  は式(3.17)の関係を満足する必要がある。

個々の剛体運動解析に関しては、固相群を剛体とし、その運動形態は並進と回転の両方から構成されると仮定して解析を行う。まず固相を高粘性流体と考え、全相に対して上述した流動解析を行う。そして、得られた固相領域内の圧力を用いて個々の剛体の重心における並進速度  $V_l$  と角速度  $\Omega_l$  を式(3.18)、式(3.19)より算定し、剛体形状を保持するように固相に対してのみ相対的位置を修正する。なお、式中の  $du/dt$  の項は、Newtonの第2法則より、剛体内部の圧力を用いて単位質量あたりの力として算定している。

$$\phi = \sum_{l=1}^L \phi_l \leq 1 \quad (3.17)$$

$$\frac{dV_l}{dt} = \frac{1}{M_l} \int_V \frac{du}{dt} \phi_l \rho_{sl} dV \quad (3.18)$$

$$\frac{d\Omega_l}{dt} = \frac{1}{I_l} \int_V \mathbf{R}_l \times \frac{du}{dt} \phi_l \rho_{sl} dV \quad (3.19)$$

$$\mathbf{R}_l = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{0l} \quad (3.20)$$

$$\mathbf{U}_l = \mathbf{V}_l + \Omega_l \mathbf{R}_l \quad (3.21)$$

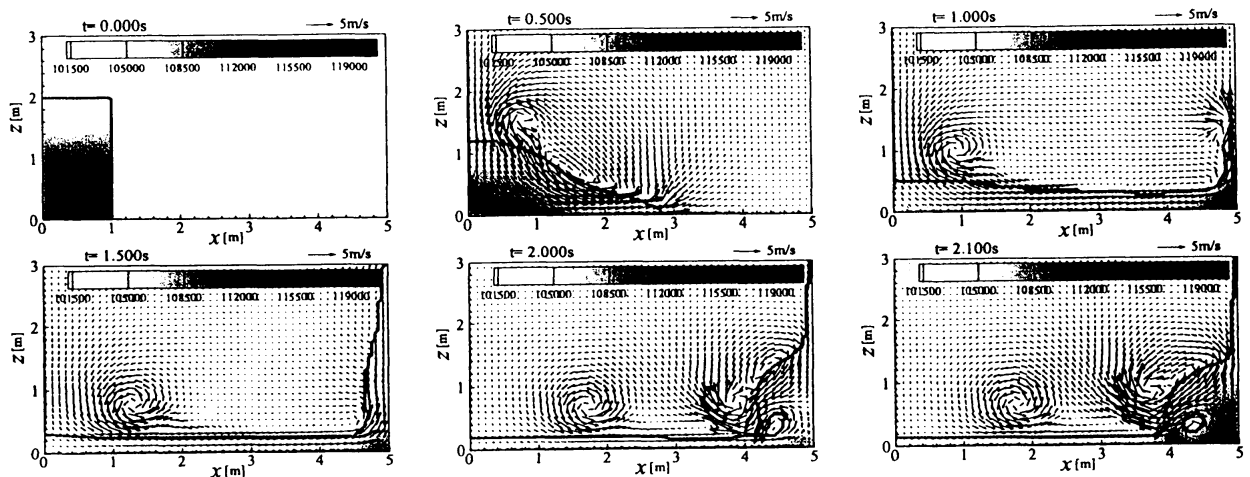


図 3.2 水柱崩壊シミュレーション

### 3.5 気液混相場への多相乱流数値モデル DOLPHIN の適用

気液移動境界流れ解析として水柱崩壊問題を取り上げ、水柱崩壊に伴う流動場、圧力場などから本モデルの妥当性を検討する。計算領域を  $5.0\text{m} \times 5.0\text{m}$  とし、 $x, z$  方向の格子幅を  $\Delta x = \Delta z = 0.05\text{m}$  とした。水柱の初期形状を幅  $1.0\text{m}$ 、高さ  $2.0\text{m}$  とし、左壁に接するように水柱を配置した。時間ステップ間隔  $\Delta t$  を  $0.0001\text{s}$  とし、水の密度  $\rho_w$  を  $998.8\text{kg/m}^3$ 、空気の密度  $\rho_a$  を  $1.20\text{kg/m}^3$ 、表面張力係数  $\sigma$  を  $7.2 \times 10^{-2}\text{N/m}$ 、重力加速度  $g$  を  $9.80665\text{m/s}^2$ 、初期大気圧  $p_a$  を  $1013\text{hPa}$  とした。なお、計算領域の上面には開境界条件し、それ以外の計算領域の境界面に対しては slip 条件を課した。

図 3.2 に、水柱崩壊に伴う流速ベクトル、圧力変動を示す。なお、太実線は気液境界面を表す。同図より、水柱は右方形状を崩しながら移動し、先端が右壁に衝突して遡上した後、下部の液相に衝突している。圧力変動の空間分布に注目すると、時刻  $t=2.1\text{s}$  では碎波する水塊の先端が下部の水塊に衝突し、液相に囲まれた内側の気相の圧力が大気圧  $1013\text{hPa}$  より大きな値となっている。これは気体が急激に圧縮されたためである。なお、液相フロントが右壁に衝突した際、液相圧力は局所的に非常に大きな値となることを確認した。

図 3.3 に図示するように、液相フロントの時間変化に関する計算結果は、Martin and Moyce(1952)による水理実験を精度良く再現しており、本モデルは複雑に変化する自由表面形状、流速場および圧力場を高精度に数値解析できることが検証される。

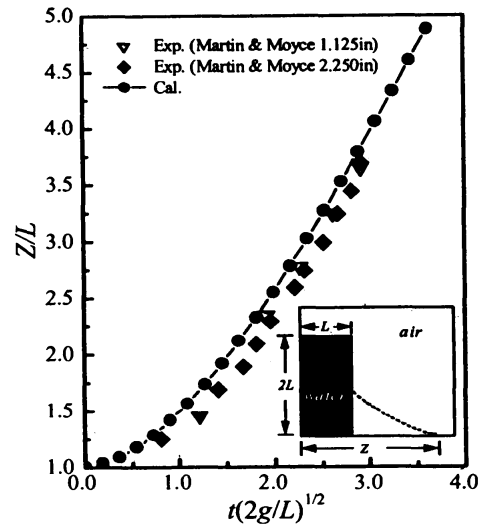


図 3.3 液相先端の経時変化

### 3.6 固気液多相場への多相乱流数値モデル DOLPHIN の適用

#### 3.6.1 ピストン型造波による浮体の動揺解析

波作用下での漂流物の動的解析の一つとして、ここではピストン型造波による浮体の動揺問題を取り上げる。図 3.4 に示すように、計算領域内に 3 つの剛体を配置し、図面左から順に、造波板、浮体、エプロン（陸域）と定義する。高さ  $0.75\text{m}$ 、幅  $0.2\text{m}$  の造波板を流速  $0.5\sin(2\pi t)$  で周期的に強制振動させることにより、水深  $0.5\text{m}$  の静水状態から造波させた。また、 $y$  方向中央部に密度  $800\text{kg/m}^3$  の五角柱型浮体（幅  $0.25\text{m} \times$  高さ  $0.225\text{m} \times$  奥行き  $0.5\text{m}$ ）を非拘束状態で配置した。工

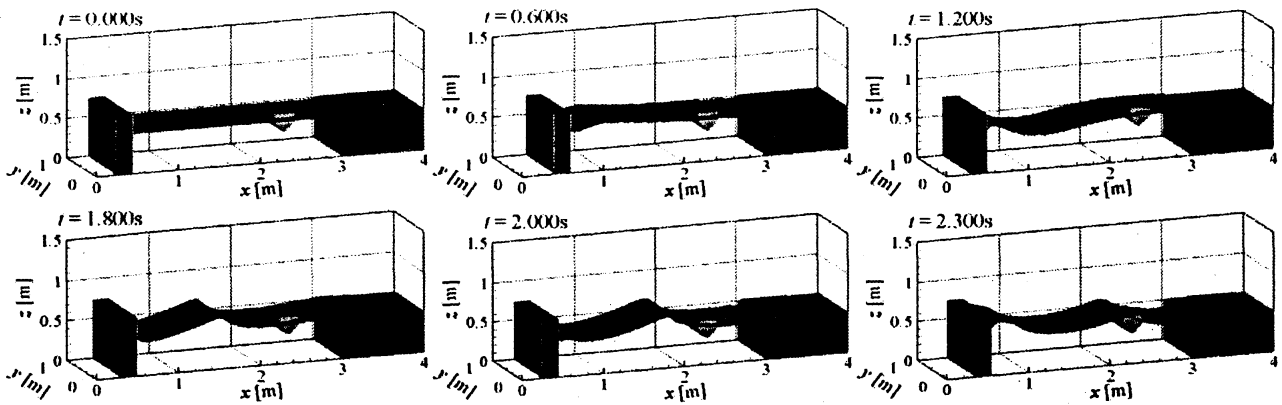


図 3.4 ピストン型造波による浮体の動揺解析結果

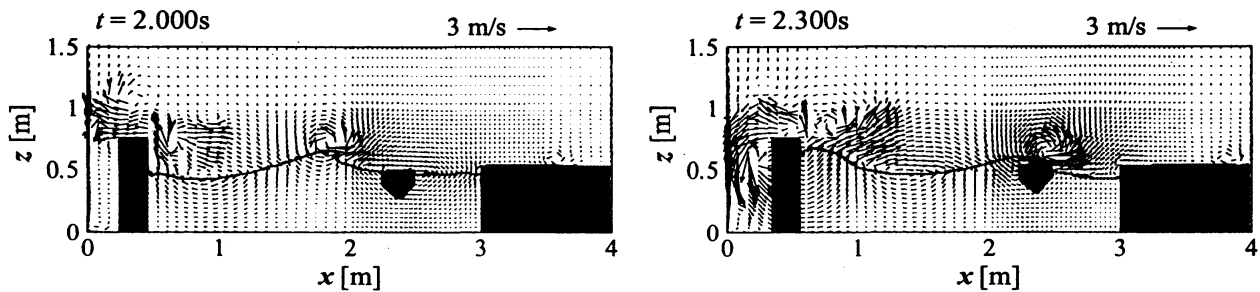


図 3.5  $x$ - $z$  断面における水面変動と流速場

ブロンに関しては、剛体内のすべての流速値を  $0\text{m/s}$  とすることで固定した。計算格子間隔については、 $y$  方向に  $\Delta y = 0.025\text{m}$  の等間隔格子とし、 $x$ ,  $z$  方向に対して本モデルで導入した不等間隔格子を採用した。具体的には、 $x = 2.0\text{m} \sim 3.5\text{m}$  の範囲で  $\Delta x = 0.0125\text{m}$ 、それ以外の範囲を  $\Delta x = 0.025\text{m}$  とした。一方、 $z$  方向に対しては、 $z = 0.0\text{m} \sim 1.0\text{m}$ 、 $1.0\text{m} \sim 1.5\text{m}$  の各範囲で  $\Delta z = 0.0125\text{m}$ 、 $0.025\text{m}$  と設定した。なお、時間ステップ間隔  $\Delta t$  を  $0.0001\text{s}$  と一定に保ち、水の密度  $\rho_w$  を  $1000.0\text{kg/m}^3$ 、空気の密度  $\rho_a$  を  $1.20\text{kg/m}^3$ 、表面張力係数  $\sigma$  を  $7.2 \times 10^{-2}\text{N/m}$ 、重力加速度  $g$  を  $9.80665\text{m/s}^2$ 、初期大気圧  $p_a$  を  $1013\text{hPa}$  とした。計算領域の上面には開境界条件を、それ以外の境界面には slip 条件を課した。

図 3.4 に、ピストン型造波による水位変動と浮体の動揺挙動の時間変化を示す。静水状態から発生する第 1 波（時刻  $t = 0.6\text{s} \sim 1.2\text{s}$ ）は正弦波のように緩やかな波形で進行するが、時刻  $t = 1.8\text{s}$  以降の第 2 波は浮体やエプロンからの反射波の影響で波峰が前傾し碎波している。特に時刻  $t = 2.3\text{s}$  では、碎波した波峰が浮体に覆い被さっている様子が確認できる。ついで、 $y$  方向中央 ( $y = 0.5$ ) における  $x$ - $z$  断面の水位変動と流速場の計算結果を示す図 3.5 をみると、前傾した波峰付近で反時計回りの渦が形成され、波谷付近では時計回りの緩やかな循環流が発生している。波峰が浮体と衝突する時刻  $t = 2.3\text{s}$  では、気相領域で反時計回りの強い渦の形成が認められる。このことは液相と固相の相互干渉が気相部にも大きな影響を及ぼしていることを示唆するものである。また、浮体は反時計回りに若干回転していることがわかる。

### 3.6.2 段波と矩形剛体の衝突・漂流解析

ここでは、陸上遡上する津波によって漂流する木材やコンテナなどが沿岸周辺施設に衝突する場合を想定して計算を行う。具体的には、川崎ら(2006)が実施した水柱崩壊に伴う段波と矩形剛体の衝突・漂流に関する水理実験および 2 次元計算と同一条件下で 3 次元数値解析を行う。そして、既往の結果との比較より、本モデルの妥当性を定量的に検証する。

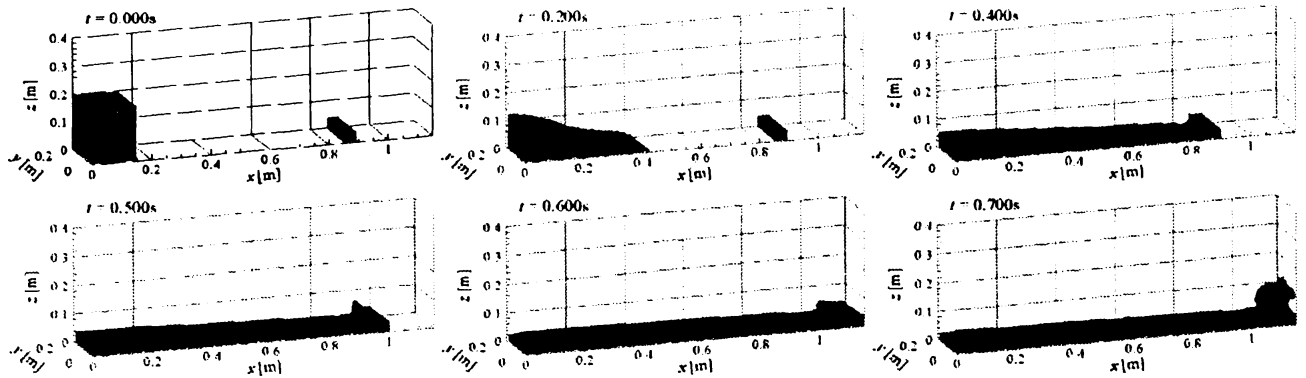


図 3.6 水柱崩壊に伴う段波と矩形剛体の衝突・漂流解析結果

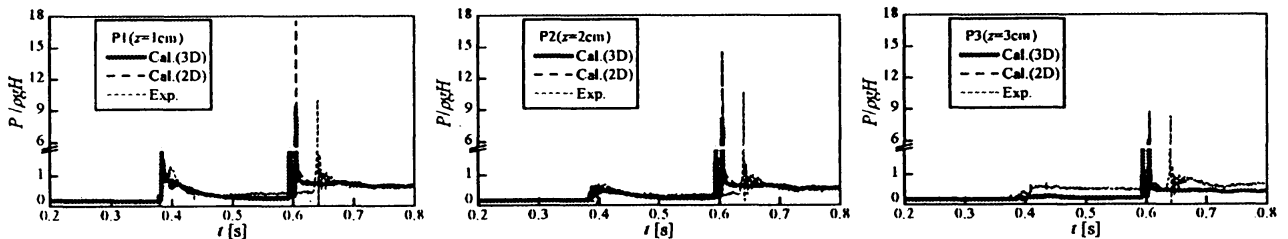


図 3.7 非固定剛体に作用する波圧の時系列変化

図 3.6 は水柱崩壊に伴う段波と矩形剛体の動的挙動の時間変化を示す。同図より、段波との衝突後、漂流した剛体は回転を伴わず右方に並進運動し、計算開始から約 0.6s 後、右壁に衝突する。その後、水塊が剛体の上方に打ち上がっている様子が認められる。矩形剛体前面に作用する波圧の時間変化を図 3.7 に示す。時刻約 0.4s に段波が剛体に衝突することにより発生する 1 回目のピークは底面近傍の P1 地点で最大値を示し、底面から離れるにつれて小さくなり、P3 地点では明確なピークが確認できない。一方、漂流剛体が右壁に衝突した時刻約 0.6s のときの最大波圧は段波が物体に衝突した波圧の 10 倍程度と非常に大きい。これは、両計算結果と実験結果においても同じ傾向を示す。計算結果と実験結果を比較すると、漂流剛体が右壁に衝突するまでに約 0.04s の時間差が認められるものの、数値計算の再現性は良好である。なお、この差違の原因として、底面および側面境界に slip 境界を課していること、水理実験ではゲートを上方に急開することにより段波を発生させており、段波の波形が若干異なることなどがあげられる。また、3 次元計算結果は 2 次元計算結果より高精度に実験結果を再現しているといえる。

以上より、固気液多相乱流数値モデル DOLPHIN の妥当性と有用性が確認された。今後、更なるモデルの高精度化を図る必要があるものの、固気液多相乱流数値モデル DOLPHIN は、風一波・流れ-構造物の相互干渉を伴う複雑な水理現象の解明を目的とした数値波動水槽として活用できるといえる。

#### 4. おわりに

先に述べたように、数値計算の役割は、理論、水理模型実験に代わる物理現象解明の一手段として、より一層重要になるだろう。そのためには、更なる高精度な数値モデルの研究・開発も必須である。一方、対象とする物理環境場を適切に把握・判断するためには、使用する数値モデルの適用限界、計算精度、計算結果の有意性などに十分留意することも忘れてはいけないと考えている。

## 参考文献

- 磯部雅彦・高橋重雄・余 錫平・榊山 勉・藤間功司・川崎浩司・蔣 勤・秋山 実・大山洋志  
(1999)：数値波動水路の耐波設計への適用に関する研究－VOF 法基本プログラムの作成－，  
海洋開発論文集，第 15 巻，pp.321-326.
- 沖縄総合事務局開発建設部(2004)：土木工事設計要領，pp. 270-298.
- 海岸保全施設技術研究会 (2004)：海岸保全施設の技術上の基準・同解説，pp. 3-27-3-29.
- 川崎浩司(1998)：潜水構造物による碎波変形と再生過程に関する基礎的研究，名古屋大学学位論文，  
186p.
- 川崎浩司・岩田好一郎(1996)：3次元波動場に設置された潜堤による Spilling 型碎波の変形過程に  
関する数値解析，海岸工学論文集，第 43 巻，pp.96-100.
- 川崎浩司・岩田好一郎(1997)：潜堤による平面 2次元波の碎波変形の数値解析，海岸工学論文集，  
第 44 巻，pp.81-85.
- 川崎浩司・岩田好一郎・村瀬政善(1998)：碎波持続域での水中圧力特性，海岸工学論文集，第 45  
巻，pp.131-135.
- 川崎浩司・大谷知樹・中辻啓二(2001)：固気液多相共存場に対する統一数値解法の構築と複雑水理  
現象への応用，海岸工学論文集，第 48 巻，pp.1026-1030.
- 川崎浩司・小木曾圭祐(2008)：Lagrange 剛体解析と Bingham 流体構成則の導入による 2次元多相  
乱流数値モデルの高度化，海岸工学論文集，第 55 巻，pp.36-40.
- 川崎浩司・菊 雅美・嶋田 宏・柴多哲郎・板橋直樹・馬淵幸雄(2007a)：現地リーフ地形におけ  
る波浪変形と護岸周辺の越波に関する数値解析，海洋開発論文集，第 23 巻，pp.201-206.
- 川崎浩司・菊 雅美・眞栄里和也・米須俊彦・嶋田 宏・五味久昭・柴多哲郎・板橋直樹(2007b)：  
数値波動水路を用いた海岸護岸周辺の越波対策工法の検討，海岸工学論文集，第 54 巻，  
pp.951-955.
- 川崎浩司・中辻啓二(2002)：3次元固気液多相流数値モデルの構築とその検証，海岸工学論文集，  
第 49 巻，pp.56-60.
- 川崎浩司・袴田充哉(2005)：2次元多相乱流数値モデルによる漂流剛体の衝撃波力解析，海岸工学  
論文集，第 52 巻，pp.726-730.
- 川崎浩司・袴田充哉(2007)：3次元固気液多相乱流数値モデル DOLPHIN-3D の開発と波作用下で  
の漂流物の動的解析，海岸工学論文集，第 54 巻，pp.31-35.
- 川崎浩司・袴田充哉・小木曾圭祐(2007)：不等間隔格子と複数剛体の運動解析法を導入した多相乱  
流数値モデル DOLPHIN-2D/3D の構築，海洋開発論文集，第 23 巻，pp.207-212.
- 川崎浩司・山口 聡・袴田充哉・水谷法美・宮島正悟(2006)：段波と矩形物体の衝突・漂流過程に  
おける作用波圧特性，海岸工学論文集，第 53 巻，pp.786-790.
- 功刀資彰(1997)：自由界面を含む多相流の直接数値解析法，日本機械学会論文集(B編)，63巻，609  
号，pp.1576-1584.
- 越塚誠一(2005)：粒子法，丸善，144p.
- 財団法人沿岸開発技術研究センター (2001)：数値波動水路 (CADMAS-SURF) の研究・開発，沿  
岸開発技術ライブラリーNo.12，457p.
- 財団法人沿岸技術研究センター (2008)：CADMAS-SURF 実務計算事例集，沿岸技術ライブラリー  
No.30，368p.
- 数値波動水路の耐波設計への適用に関する研究会(2002)：[研究展望] 海域施設の耐波設計に適用  
できる数値波動水路 (CADMAS-SURF) の研究・開発とその将来展望，土木学会論文集，

- No.705/II-59, pp.1-17.
- Brackbill, J. U., D. B. Kothe and C. Zemach (1992) : A continuum method for modeling surface tension, *Journal of Computational Physics*, Vol.100, pp.335-354.
- Brosen, M. and J. Larsen(1987) : Source generation of nonlinear gravity waves with the boundary integral equation method, *Coastal Engineering*, Vol.11, pp.93-113.
- Hinatsu, M. (1992) : Numerical simulation of unsteady viscous nonlinear waves using moving grid system fitted on a free surface, *Jour. Kansai Soc. Naval Architects Japan*, No.217, pp.1-11.
- Hirt, C. W. and B. D. Nichols(1981) : Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries, *Journal of Computational Physics*, Vol.39, pp.201-225.
- Hirt, C. W., B. D. Nichols and N. C. Romero(1975) : SOLA : A numerical solution algorithm for fluid flows, Los Alamos Scientific Laboratory, Report LA-5852, 50p.
- Kawasaki, K.(1999) : Numerical simulation of breaking and post-breaking wave deformation process around a submerged breakwater, *Coastal Engineering Journal*, Vol.41, Nos.3 & 4, pp.201-223.
- Kawasaki, K. (2005): Numerical Model of 2-D Multiphase Flow with Solid-Liquid-Gas Interaction, *International Journal of Offshore and Polar Engineering*, Vol.15, No.3, pp.198-203.
- Kawasaki, K. and K. Iwata(1996) : Numerical analysis of wave breaking due to submerged structure, *Proceedings of 6th International Offshore and Polar Engineering Conference*, Vol.III, pp.168-175.
- Kawasaki, K. and K. Iwata(1998) : Numerical analysis of wave breaking due to submerged breakwater in three-dimensional wave field, *Proceedings of the 27th International Conference on Coastal Engineering*, Vol.1, pp.853-866.
- Martin, J. C. and W. J. Moyce (1952) : An experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser.A*, Vol.244, pp.312-324, 1952.
- Nichols, B. D., C. W. Hirt and R. S. Hotchkiss(1980) : SOLA-VOF - A solution algorithm for transient fluid with multiple free boundaries, Report LA-8355, Los Alamos Scientific Laboratory, University of California, 119p.
- Sussman, M., P. Smereka and S. Osher(1994) : A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow, *Journal of Computational Physics*, Vol.114, pp.146-159.
- Xiao, F., T. Yabe, T. Ito and M. Tajima(1997) : An algorithm for simulating solid objects suspended in stratified flow, *Computer Physics Communications*, Vol.102, pp.147-160.
- Yabe, T.(1997) : Unified solver CIP for solid, liquid and gas, *Computational Fluid Dynamics Review*, pp.1-16.
- Yabe, T. and T. Aoki (1991): Universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation I. one-dimensional solver, *Computer Physics Communications*, Vol.66, pp.219-232.
- Yabe, T. and P.-Y. Wang(1991): Unified numerical procedure for compressible and incompressible fluid, *Journal of The Physical Society of Japan*, Vol.60, No.7, pp.2105-2108.
- Youngs, D. L.(1982): Numerical methods for fluid dynamics, Academic Press, pp.273-468.