数理解析研究所講究録
第1674巻 2010年 1-4

数式処理による教育の充実
―教員免許状更新講習より―

神戸大学 長坂耕作 (Kosaku Nagasaka)
Kobe University

1 はじめに

本発表では，下記の教員免許状更新講習（選択領域）において，数式処理の活用や理解を通して中等教育の充実が図れるような講習を実施した結果に付いて報告を行います。

日程 8月20日と8月21日（二回開講）

講座 数式処理のソフトと理論

対象 中学校（数学）教諭，高校（数学）教諭（ただし限定しない）

定員 50名（各回）

内容 数学の授業で利活用が可能な数式処理ソフトウェアの紹介と数式処理の理論（計算機代数）について概説する。特に，中・高数学でも扱う因数分解に関しては，一般の高次多項式を因数分解する古典的な方法から最新の方法までを，その成り立ちと考え方について理解を深めることを目標とする。

同時期に，数学分野を対象にした教員免許状更新講習（選択領域）を他に2講座開講しましたが，様々な状況の変化に伴い，全体的にほとんど参加の申し込みはなく，本講座についても8月20日に9名と8月21日に5名の登録しかありませんでした。なお，これら登録受講予定者への教員免許状更新講習事前アンケートにおける「受講される講習の内容についての要望」は，以下のようなものでした（文言は掲載にあたり修正あり)。

- 実際にコンピュータを使っての演習をたくさんさせて頂きたいです。
- 高校の数学でも活かせるようなお話や実習をお願いします。
- 公務・授業で活用・実用可能な事項を教えて頂きたいです。
- パソコン関係の講習でよくあるが，考えているうちにどんどん進んでいき，ついていけなくなるのは勘弁して頂きたいです。予備知識が少なくても理解できる内容で，ゆっくりじっくり進めて頂きたいです。
- ゆっくり丁寧な指導をお願いします。

2　講座の内容

実際の講座は，紙ベースの配布資料に基づいて，パソコンとプロジェクタによるプレゼンテーションと黒板による詳細な説明で行いました。扱った内容は，中等数学教育でも扱われる因数分解を中心に，代数方程式の求解法などのバッググラウンドを実践的な面から選び，(1) 数式処理とは，(2) 基礎的事実の確認，(3) 整数係数多項式の因数分解アルゴリズム，(4) 代数方程式を Gröbner 基底で解く，の 4 点です。

講座内容「数式処理とは」

冒頭の事前アンケートから読み取れることは，残念ながら「数式処理 = Mathematica/Maple などのソフトウェアの使い方」という誤解が多いか，講習内容を熟読されていない方が多いということです。前者については，数学教諭に限ったことでなく，一般に幅広く誤解されていると個人的に強く感じているものです。実践的な問題解決に数学的な肉付けを可能とする数式処理を正しく理解して頂くことは，特に理数系へ進学する生徒指導上も重要かと考えられ，そのような観点から，(1) 数式処理のスコープ（Computer Algebra Handbook の目次から），(2) 数式処理の学術団体や国際研究集会，(3) 各種の数式処理ソフトウェアの紹介，を中心に講習しました。

講座内容「基礎的事実の確認」

数学教諭の学術的なバックグラウンドは，教員免許状の取得経緯に依存するため，数式処理において最低限必要となる学部レベルの代数知識について簡単な復習を行いました。実施したのは，(1) 環と体の定義，(2) 根の表現（有理数，小数，巾根など），(3) 代数学の基本定理とアーベルの定理，の 3 点です。この中で，数式処理の位置付けとして，数学的に厳密な操作や解を求めることが可能となるが，それが実際に必要とされる解の表現であるかは別であって，実際的には近似的な手法で求める場合が少なくないということ，しかし，近似的な手法では回避が難しい誤差を小さくする，直接近似的には解くことが難しい問題を解きやすくするなどに有効であると講習しました。

講座内容「整数係数多項式の因数分解」

大学に入学するまでの数学でも扱われる整数係数多項式の因数分解について，次数が高い（3 次以上の）ものや因数定理でカバーすることが出来ない場合など，一般的な多項式の因数分解の手法として「Zassenhaus アルゴリズム」を講習しました。個々の項目としては，(1) モニック多項式やモニック変換，(2) 原始的な多項式や係因数の取り出し，(3) Euclid の互除法（擬除算による），(4) 拡張された Euclid の互除法（仕組みの理解のため，手計算による代入法で代替した），(5) 無平方分解，(6) Berlekamp アルゴリズム，(7) Hensel 構成，(8) Zassenhaus アルゴリズムの全容，となります。免許状更新講習の意図に配慮し，高校までの数学でも実現可能な (1)〜(5) を重点的に，(6)〜(8) は概要として講習しました。

講座内容「代数方程式を Gröbner 基底で解く」

幅広い応用が行われている Gröbner 基底の考え方は，中等教育における代数方程

式の解き方を一般化したものと捉えることが可能です。実際に，東京電機大学出版局から出版されている「入門 Mathematica【決定版】Ver.7 対応」では，Gröbner 基底を計算する重要なアルゴリズムの開発者である Bruno Buchberger 先生が，その仕組みを高校生に教えた際の記録が掲載されています。講習では，そのような考え方に加え，(1) 項順序，(2) 単項簡約，(3) S-Polynomial，(4) Gröbner 基底の定義，(5) Buchberger アルゴリズム，という必要最低限の定義についても概要を説明しました。

3 講座の試験

認定試験が義務付けられていますので，5 時間の講義後に以下の試験（1 時間）を行いました（アルゴリズムなどの資料を参考に，実際に計算を行う問題が含まれています）。

1. 数式処理という分野を，ご自分の言葉で，例を交えて簡単に説明してください。
（15 点）

2. 代数方程式の解が存在すること，解を求めること，解を表現すること，の 3 つの違いを，ご自分の言葉で，例を交えて簡単に説明してください。
（15 点）

3. 次の多項式 $f(x), g(x) \in \mathbf{Z}[x]$ の $\mathbf{Z}$ 上の GCD を Euclid の互除法で求めてください。
$$f(x) = 12x^5 + 12x^4 + 12x^3 - 6x^2 - 6x - 6,$$
$$g(x) = 12x^4 + 12x^3 + 16x^2 + 4x + 4$$
（20 点）

4. 拡張された Euclid の互除法の代替として紹介した方法で，次の関係式を満たす多項式 $h(x)$ を求めてください。
$$(3x^3 + 2x^2 + 2x + 1) \times h(x) \equiv 1 \pmod{5,\ (x^4 - 1)}$$
（20 点）

5. 授業資料に掲載の Zassenhaus アルゴリズムにおいて，ステップ 7 と 8 で行う「規格化」が必要な理由を述べてください。
（15 点）

6. 授業資料に掲載の Zassenhaus アルゴリズムにおいて，ステップ 8 で行う「試し割り」が必要な理由を述べてください。
（15 点）

4 まとめと今後の課題

自由記述形式の試験問題に対する回答を見る限り，(1) 数式処理とはソフトウェアのことだけではない，(2) 実際に必要とされる解を求めることは大変である，(3) 整数係数多項式の Euclid の互除法による GCD の計算，などについては理解が進んだことがわかりました。一方で，大学における専門教育（それも一部のカリキュラムでのみ提供される）に含まれる範囲である，(1) 拡張された Euclid の互除法（有限体上），(2) 有限体を経由することに伴う様々な問題（Zassenhaus の方法で規格化や試し割りが必要な理由），については，十分に理解が進んだとは言えない状況でした。なお，講習後の受講者評価アンケート結果（下記に抜粋）は，概ね良い評価となっています。

本講習の内容・方法についての総合的な評価

観点	学校現場が直面する諸状況や教員の課題意識を反映して行われていたか。講習のねらいや到達目標が明確であり，講習内容はそれらに即したものであったか。受講生の学習意欲がわくような工夫をしていたか。適切な要約やポイントの指摘等がなされ，説明が分かりやすかったか。配付資料等使用した教材は適切であったか。
評価	よい：3 人，だいたいよい：9 人，あまり十分でない：1 人，不十分：0 人

本講習を受講したあなたの最新の知識・技能の修得の成果についての総合的な評価

観点	教職生活を振り返るとともに，教職への意欲の再喚起，新たな気持ちでの取り組みへの契機となったか。教育を巡る様々な状況，幅広い視野，全国的な動向等を修得することができたか。各教育活動に係る学問分野の最新の研究動向，これまでの研修等では得られなかった理論・考え方・指導法や技術等を学ぶことができ，今後の教職生活の中での活用や自らの研修での継続した学習が見込まれるか。受講前よりも講習内容への興味が深まり，教員としての知識技能の厚みや多様さを増す一助となったか。
評価	よい：4 人，だいたいよい：8 人，あまり十分でない：1 人，不十分：0 人

本講習を通して，教育現場へのテクノロジの導入が進んだ弊害として，数式処理の研究分野としての不理解やただのソフトウェアとしての誤認識が発生しているのではないかという懸念を感じました。ソフトウェアとして数式処理が認識されることは，場合により数式処理のブラックボックス化が進み，研究分野としての先細り感・空洞化の恐れがあるように考えられるからです。一方で，口頭での質疑応答の中には，幾何自動証明（数式処理のトピック）などの中等教育で扱う分野の先端的な内容への興味の高さも感じられました。また，問題を解く手法としての教育（例えば，解の公式の導入後にも近似の概念を扱ったり，発見的手法でない計算アルゴリズムの導入など）を早期に数式処理という立場から行うことで，実践的な視野を与えられるのでは，という考えも持ちました。なお，本研究集会における発表時，発見的手法と機械的手法という対比で，発見的に学ばせることが重要であるという観点と，問題を解決する立場から機械的な方法が重要であるという観点が交錯する議論がありました。どちらも相反せず重要であると考えられることを申し添えておきます。