数理解析研究所講究録
第1676巻 2010年 28-35

$\mathcal{H}$-マトロイドの階数関数について
(On the rank functions of $\mathcal{H}$-matroids)

京都大学・数理解析研究所　　佐野良夫 (Yoshio SANO)

概要

マトロイドとは、1935年に H. Whiteney [4] が線型独立の概念の一般化として導入した概念である。離散最適化分野におけるマトロイドの重要性は、1960年代に J. Edmonds によって明らかにされた。$\mathcal{H}$-マトロイドは（普通の）マトロイドの一般化である。$\mathcal{H}$-マトロイドの概念は U. Faigle - S. Fujishige [1] によって、2009年に導入された。

本稿では、$\mathcal{H}$-マトロイドの階数関数について考察する。まず、一般の $\mathcal{H}$-マトロイドは階数関数によって特徴づけできないということを示す例を紹介する。その後、$\mathcal{H}$-マトロイドの部分クラスである単体複体的 $\mathcal{H}$-マトロイド、およびストリクト凸幾何マトロイドについて考察し、それらの階数関数による特徴づけを与える。

目次

1. マトロイドの簡単な復習

定義 1.1. E を有限集合とし、$\emptyset \neq \mathcal{I} \subseteq 2^E$ を非空な E の部分集合族とする。このとき、$M = (E, \mathcal{I})$ が**マトロイド**であるとは、$\mathcal{I}$ が次の 2 つの条件を満たす時をいう。

(1) $\mathcal{I}$ は**単体複体（独立システム）**である、
すなわち、「$X \subseteq I \in \mathcal{I} \Rightarrow X \in \mathcal{I}$」を満たす。

(2) (Steinitz Exchange Property)
任意の $X \in 2^E$ に対して、$\mathcal{I}^{(X)} := \{I \in \mathcal{I} \mid I \subseteq X\}$ の全ての極大元は同じ元数をもつ。 □

定義 1.2. マトロイド $M = (E, \mathcal{I})$ の**基**とは、$\mathcal{I}$ の極大元のことである。M の基全体の集合を $\mathcal{B}$ で表わす。 □

定義 1.3. マトロイド $M = (E, \mathcal{I})$ の**階数関数** $\rho : 2^E \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を次のように定義する。

$$\rho(X) := \max_{B \in \mathcal{B}} |X \cap B| = \max_{I \in \mathcal{I}} |X \cap I| = \max_{I \in \mathcal{I}, I \subseteq X} |I|.$$

□

このとき、$\mathcal{I} = \{X \in 2^E \mid \rho(X) = |X|\}$ である。

定理 1 (マトロイドの階数関数の特徴づけ：大域版)**.**
$\rho : 2^E \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ がマトロイドの階数関数であるための必要十分条件は、ρ が次の 3 つの条件を満たすことである。

(RG0) 任意の $X \in 2^E$ に対して、$0 \leq \rho(X) \leq |X|$.

(RG1) $X \subseteq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$.

(RGS) (Global Submodularity)
任意の $X, Y \in 2^E$ に対して、$\rho(X) + \rho(Y) \geq \rho(X \cap Y) + \rho(X \cup Y)$. □

定理 2 (マトロイドの階数関数の特徴づけ：局所版)**.**
$\rho : 2^E \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ がマトロイドの階数関数であるための必要十分条件は、ρ が次の 3 つの条件を満たすことである。

(RL0) $\rho(\emptyset) = 0$.

(RL1) 任意の $X \in 2^E$ と任意の $e \in E$ に対して、$\rho(X) \leq \rho(X \cup \{e\}) \leq \rho(X) + 1$.

(RLS) (Local Submodularity)
任意の $X \in 2^E$ と任意の $e_1, e_2 \in E$ に対して、$\rho(X) = \rho(X \cup \{e_1\}) = \rho(X \cup \{e_2\})$ ならば $\rho(X) = \rho(X \cup \{e_1, e_2\})$ である。 □

2. $\mathcal{H}$-マトロイド

2.1. $\mathcal{H}$-マトロイドの定義

定義 2.1. E を有限集合とし、$\emptyset \neq \mathcal{F} \subseteq 2^E$ を非空な E の部分集合族とする。このとき、$\mathcal{F}$ が **constructible** であるとは、任意の $X \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$ に対して、ある $e \in X$ が存在して $X \setminus \{e\} \in \mathcal{F}$ となる時をいう。$\mathcal{F}$ の元 X が、$\mathcal{F}$ の **基** であるとは、$X \cup \{e\} \in \mathcal{F}$ となる元 $e \in E \setminus X$ が存在しない時をいう。$\mathcal{F}$ の基全体の集合を $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{F})$ で表す。 □

$\mathcal{F}$ の極大元全体の集合を $\mathbf{Max}(\mathcal{F})$ で表すことにすると、一般に、$\mathbf{Max}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{F})$ が成り立つ。

定義 2.2. E を有限集合とし、$\emptyset \neq \mathcal{F} \subseteq 2^E$ を *constructible* な E の部分集合族とする。このとき $\mathcal{F}$ の**階数関数** $\rho : 2^E \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を次のように定義する。

$$\rho(X) := \max_{B \in \mathcal{B}} |X \cap B| = \max_{F \in \mathcal{F}} |X \cap F|$$

□

命題 3. *constructible* な E の部分集合族 $\mathcal{F}$ の階数関数 $\rho : 2^E \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は、次を満たす。

(0) $\rho(\emptyset) = 0$.

(1) (Unit-increasing Property)
$X \subseteq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y) \leq \rho(X) + |Y \setminus X|$.

定義 2.3. E を有限集合とし、$\{\emptyset, E\} \subseteq \mathcal{H} \subseteq 2^E$ を 1 つ固定する。$\emptyset \neq \mathcal{I} \subseteq 2^E$ を *constructible* な E の部分集合族とする。このとき、$M = (E, \mathcal{I})$ が **$\mathcal{H}$-マトロイド** であるとは、$\mathcal{I}$ が次の 2 つの条件を満たす時をいう。

(1) $\mathcal{I}$ は **$\mathcal{H}$-独立システム** である、
すなわち、任意の $H \in \mathcal{H}$ に対して、ある $I \in \mathcal{I}^{(H)} := \{I \in \mathcal{I} \mid I \subseteq H\}$ が存在して、$|I| = \rho(H)$ となる。

(2) 任意の $H \in \mathcal{H}$ に対して、$\mathcal{I}^{(H)} := \{I \in \mathcal{I} \mid I \subseteq H\}$ の全ての基は同じ元数をもつ。 □

2.2. $\mathcal{H}$-マトロイドと貪欲アルゴリズム

- **最大重み独立集合問題**

入力	:	$\mathcal{I} \subseteq 2^E$: $\mathcal{H}$-独立システム、$w : E \to \mathbb{R}$
最大化	:	$w(I) := \sum_{e \in I} w(e)$
制約条件	:	$I \in \mathcal{I}$

- **貪欲アルゴリズム**

初期化	:	$J \leftarrow \emptyset$.
くり返し	:	$\Gamma(J) := \{e \in E \setminus J \mid J \cup \{e\} \in \mathcal{I}, w(e) > 0\} \neq \emptyset$ なら、 最大重みをもつ $e \in \Gamma(J)$ を選び、$J \leftarrow J \cup \{e\}$. $\Gamma(J) = \emptyset$ なら、ストップ。
出力	:	J

定理 4 ([1]). E を有限集合とし、$\{\emptyset, E\} \subseteq \mathcal{H} \subseteq 2^E$ を 1 つ固定する。$\mathcal{I} \subseteq 2^E$ を $\mathcal{H}$-独立システムとする。このとき、$M = (E, \mathcal{I})$ が $\mathcal{H}$-マトロイドであるための必要十分条件は、*$\mathcal{H}$-feasible* である任意の重み関数 $w : E \to \mathbb{R}$ に対して、貪欲アルゴリズムが最大重み独立集合問題の最適解を与えることである。ここで、$w : E \to \mathbb{R}$ が *$\mathcal{H}$-feasible* であるとは、任意の $a \in \mathbb{R}$ について $W(a) := \{e \in E \mid w(e) \geq a\} \in \mathcal{H}$ となることをいう。 □

2.3. $\mathcal{H}$-マトロイドの階数関数が特徴づけできない例

例 5. $E = \{1, 2, 3\}$、$\mathcal{H} = \{\emptyset, E\}$ とする。

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1 &= \{\emptyset, \{2\}, \{1,2\}, \{2,3\}\}, \\
\mathcal{I}_2 &= \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}\}, \\
\mathcal{I}_3 &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}\}
\end{aligned}$$

とすると、各 $(E, \mathcal{I}_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ は $\mathcal{H}$-マトロイドとなるが、それらの階数関数は一致する。ちなみに、その共通の階数関数 $\rho : 2^E \to \mathbb{R}$ のもつ値は、

$$\rho(\emptyset) = 0,\ \rho(\{1\}) = 1,\ \rho(\{2\}) = 1,\ \rho(\{3\}) = 1,$$
$$\rho(\{1,2\}) = 2,\ \rho(\{2,3\}) = 1,\ \rho(\{1,3\}) = 2,\ \rho(\{1,2,3\}) = 2$$

となる。 □

3. 単体複体的 $\mathcal{H}$-マトロイド

3.1. 単体複体的 $\mathcal{H}$-マトロイドの定義

定義 3.1. E を有限集合とし、$\{\emptyset, E\} \subseteq \mathcal{H} \subseteq 2^E$ を 1 つ固定する。$\emptyset \neq \mathcal{I} \subseteq 2^E$ を非空な E の部分集合族とする。このとき、$M = (E, \mathcal{I})$ が **単体複体的 $\mathcal{H}$-マトロイド** であるとは、$\mathcal{I}$ が次の 2 つの条件を満たす時をいう。

(1) $\mathcal{I}$ は、単体複体である。$(X \subseteq I \in \mathcal{I} \Rightarrow X \in \mathcal{I})$

(2) $(E, \mathcal{I})$ は、$\mathcal{H}$-マトロイドである。 □

3.2. 単体複体的 $\mathcal{H}$-マトロイドの階数関数

定理 6 (YS). E を有限集合とし、$\{\emptyset, E\} \subseteq \mathcal{H} \subseteq 2^E$、$\rho : 2^E \to \mathbb{Z}$ とする。このとき、rho がある単体複体的 $\mathcal{H}$-マトロイドの階数関数であるための必要十分条件は、ρ が次の条件を満たすことである。

(0) $\rho(\emptyset) = 0.$

(1) $X \subseteq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y) \leq \rho(X) + |Y \setminus X|.$

(2) ($\mathcal{H}$-Extension Property)
$H \in \mathcal{H}$ と $X \subseteq H$ に対して、$\rho(X) = |X| < \rho(H)$ ならば、
ある $e \in H \setminus X$ が存在して $\rho(X \cup \{e\}) = \rho(X) + 1$ となる。 □

4. ストリクト凸幾何マトロイド

4.1. ストリクト凸幾何マトロイドの定義

定義 4.1. E を有限集合とし、$\{\emptyset, E\} \subseteq \mathcal{H} \subseteq 2^E$ とする。$\mathcal{H}$ が E 上の**凸幾何**であるとは、$\mathcal{H}$ が次の 2 つの条件を満たす時をいう。

(1) $X, Y \in \mathcal{H} \Rightarrow X \cap Y \in \mathcal{H}$.

(2) 任意の $\mathcal{H}$ の極大鎖 $\emptyset = H_0 \subsetneq H_1 \subsetneq \cdots \subsetneq H_n = E$ の長さは、$n = |E|$ である。 □

定義 4.2. E を有限集合とし、$\{\emptyset, E\} \subseteq \mathcal{H} \subseteq 2^E$ を 1 つ固定する。$\emptyset \neq \mathcal{I} \subseteq 2^E$ を非空な E の部分集合族とする。このとき、$M = (E, \mathcal{H}; \mathcal{I})$ が**ストリクト凸幾何マトロイド**であるとは、次の 3 つの条件を満たす時をいう。

(1) $\mathcal{H}$ は、E 上の凸幾何である。

(2) $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{H}$.

(3) $(E, \mathcal{I})$ は、$\mathcal{H}$-マトロイドである。 □

4.2. ストリクト凸幾何マトロイドの階数関数

定義 4.3. ストリクト凸幾何マトロイド $M = (E, \mathcal{H}; \mathcal{I})$ の**階数関数** $\rho : \mathcal{H} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を次のように定義する。

$$\rho(X) := \max_{I \in \mathcal{I}} |X \cap I|.$$

□

注. ρ の定義域は 2^E ではなく $\mathcal{H}$ に制限したものを考える。

このとき、$\mathcal{I} = \{X \in \mathcal{H} \mid \rho(X) = |X|\}$ である。

命題 7 ([2]). ストリクト凸幾何マトロイドの階数関数 $\rho : \mathcal{H} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は次を満たす。

(RG0) 任意の $X \in \mathcal{H}$ に対して、$0 \leq \rho(X) \leq |X|$.

(RG1) $X, Y \in \mathcal{H}$ に対して、$X \subseteq Y$ ならば $\rho(X) \leq \rho(Y)$ である。

(RGS) (Global Submodularity)
$X \cup Y \in \mathcal{H}$ である任意の $X, Y \in \mathcal{H}$ に対して、
$\rho(X) + \rho(Y) \geq \rho(X \cap Y) + \rho(X \cup Y)$. □

命題 8 ([2]). ストリクト凸幾何マトロイドの階数関数 $\rho : \mathcal{H} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は次を満たす。

(RL0) $\rho(\emptyset) = 0$.

(RL1) $X \cup \{e\} \in \mathcal{H}$ となるような任意の $X \in \mathcal{H}$ と任意の $e \in E$ に対して、
$\rho(X) \leq \rho(X \cup \{e\}) \leq \rho(X) + 1$.

(RLS) (Local Submodularity)
$X \cup \{e_1\} \in \mathcal{H}$、$X \cup \{e_2\} \in \mathcal{H}$、$X \cup \{e_1, e_2\} \in \mathcal{H}$ となるような
任意の $X \in 2^E$ と任意の $e_1, e_2 \in E$ に対して、
$\rho(X) = \rho(X \cup \{e_1\}) = \rho(X \cup \{e_2\}$ ならば $\rho(X) = \rho(X \cup \{e_1, e_2\})$ である。 □

しかし、上記の性質 (RG0)、(RG1)、(RGS)、(RL0)、(RL1)、(RLS) だけでは特徴づけできない。

例 9. $E = \{1, 2, 3, 4\}$、$\mathcal{H} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ とする。このとき、$(E, \mathcal{H})$ は凸幾何である。$\rho : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ を

$$\begin{aligned}
&\rho(\emptyset) = 0,\ \rho(\{1\}) = 1,\ \rho(\{2\}) = 1,\ \rho(\{3\}) = 1,\ \rho(\{4\}) = 1, \\
&\rho(\{1, 2\}) = 2,\ \rho(\{2, 3\}) = 1,\ \rho(\{3, 4\}) = 2, \\
&\rho(\{1, 2, 3\}) = 2,\ \rho(\{2, 3, 4\}) = 2,\ \rho(\{1, 2, 3, 4\}) = 3
\end{aligned}$$

で定義する。このとき、$\rho : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ は、性質 (RG0)、(RG1)、(RGS)、(RL0)、(RL1)、(RLS) を満たす。しかし、

$$\mathcal{I} = \{X \in \mathcal{H} \mid \rho(X) = |X|\} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$$

であり、$(E, \mathcal{H}; \mathcal{I})$ はストリクト凸幾何マトロイドにはならない。 □

命題 10 ([3]). ストリクト凸幾何マトロイドの階数関数 $\rho : \mathcal{H} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は次を満たす。

(RLE) (Local Extension Property)
$X \subseteq Y$ であるような $X, Y \in \mathcal{H}$ に対して、$\rho(X) = |X| < \rho(Y)$ ならば、
ある $e \in Y \setminus X$ が存在して $X \cup \{e\} \in \mathcal{H}$、$\rho(X \cup \{e\}) = \rho(X) + 1$ となる。

(RGE) (Global Extension Property)
$X \subseteq Y$ であるような $X, Y \in \mathcal{H}$ に対して、$\rho(X) = |X| < \rho(Y)$ ならば、
ある $Z \in \mathcal{H}$ が存在して $X \subsetneq Z \subseteq Y$、$\rho(Z) = |Z| = \rho(Y)$ となる。 □

定理 11 ([3]). E を有限集合、$\mathcal{H}$ を E 上の凸幾何、$\rho : \mathcal{H} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を $\mathcal{H}$ 上定義された非負整数値関数とする。このとき、次の条件は同値である。

(1) ρ は、ストリクト凸幾何マトロイドの階数関数である。

(2) ρ は、性質 (RL0)、(RL1)、(RGE) を満たす。

(3) ρ は、性質 (RL0)、(RL1)、(RLE) を満たす。

(4) ρ は、性質 (RG0)、(RG1)、(RGS)、(RLE) を満たす。 □

注. 性質 (RG0)、(RG1)、(RLE) では、特徴づけられない。

注. 性質 (RG0)、(RG1)、(RGS)、(RGE) では、特徴づけられない。

5. まとめ

普通のマトロイドはその階数関数によって特徴づけられるのに対し、マトロイドの一般化である $\mathcal{H}$-マトロイドについては、一般の $\mathcal{H}$-マトロイドは階数関数によって特徴づけができないということが明らかになった。しかしながら、単体複体的 $\mathcal{H}$-マトロイド、およびストリクト凸幾何マトロイドという $\mathcal{H}$-マトロイドの部分クラスに対しては、階数関数による特徴づけが可能であることがわかった。

参考文献

[1] U. Faigle and S. Fujishige: A general model for matroids and the greedy algorithm, *Math. Program., Ser. A*, **119** (2009) 353–369.

[2] S. Fujishige, G. A. Koshevoy, and Y. Sano: Matroids on convex geometries (cg-matroids), *Discrete Mathematics* **307** (2007) 1936–1950.

[3] Y. Sano: Rank functions of strict cg-matroids, *Discrete Mathematics* **308** (2008) 4734-4744.

[4] H. Whitney: On the abstract properties of linear dependence, *American Journal of Mathematics* **57** (1935) 509–533.