数理解析研究所講究録
第 1679 巻 2010 年 84-87

一般バーンサイド環のための新たな部分群の族 II

山形大学・理学部　小田 文仁　(Fumihito Oda)
Faculty of Science, Yamagata University

この報告集の澤辺正人氏の報告 [Sa] の続きとして [OS] の概略を述べる.

1　原始べき等元と $\Omega(G,\mathcal{G}_I)$ の単位元 $I^G_{\mathcal{G}_I}$

$\mathcal{D}$ は G の部分群族 ([Sa, Section 1]) とする.

やや唐突ではあるが, 圏論的な（$(G,\mathcal{D})$-集合の圏におけるある種の coequalizer の存在に関する）要請から, 以下のような部分群を準備する. 部分群 $H \leq G$ に対し次のように G の部分群 $\overline{H}$ を定める:

$$\overline{H} := \begin{cases} \bigcap_{S\in\mathcal{D}(\geq H)} S & \text{if} \quad \mathcal{D}(\geq H) \neq \emptyset, \\ G & \text{if} \quad \mathcal{D}(\geq H) = \emptyset. \end{cases}$$

ただし, $\mathcal{D}(\geq H)$ は $D \geq H$ を満たす $\mathcal{D}$ の元全体の集合とする. $S \in \mathcal{D}$ に対して, 剰余群 $WS := N_G(S)/S$ の一つの Sylow p-部分群を $(WS)_p$ と書く. Yoshida は次のような条件を与えた:
$(\mathbf{C})_p$　$S \in \mathcal{D}$, $gS \in (WS)_p \Longrightarrow \overline{\langle g\rangle S} \in \mathcal{D}$.
$(\mathbf{C}')_p$　$S \in \mathcal{D}$, $gS \in (WS)_p \Longrightarrow \langle g\rangle S \in \mathcal{D}$.
ただし, $\langle g\rangle S$ は S と g で生成される部分群とする. $(\mathbf{C}')_p \Longrightarrow (\mathbf{C})_p$ が成り立つことを注意する. さらに「すべての素数 p に対して $(\mathbf{C})_p$ が成立すること」と必要十分な以下の条件を与えた:
$(\mathbf{C})_\infty$　$S \in \mathcal{D}$, $gS \in WS \Longrightarrow \langle g\rangle S \in \mathcal{D}$.

p を素数, $\mathbb{Z}_{(p)} \subseteq \mathbb{Q}$ を p-local ring とする. 加法群 M に対し, $M_{(p)} := \mathbb{Z}_{(p)} \otimes_{\mathbb{Z}} M$ とする. Yoshida の定理は以下の通りである:

補題 1. **[Yd90, Theorem 3.11]** (1) 条件 $(\mathbf{C})_p$ の下で, $\Omega(G,\mathcal{D})_{(p)}$ は一般バーンサイド環 ([Sa, 定義 2]) である.
(2) 特に条件 $(\mathbf{C})_\infty$ の下で, $\Omega(G,\mathcal{D})$ は一般バーンサイド環である.
(3) さらに, 素数 p に対し, (1) と (2) で定義される $\Omega(G,\mathcal{D})_{(p)}$ の環構造は一致する.

一般バーンサイド環 $\Omega(G,\mathcal{D})_{(p)}$ の原始べき等元を決定するために以下の同値関係を定義する.

同値関係 $\sim_p$**.** $\mathcal{D}$ に条件 $(\mathbf{C})_p$ を仮定する. このとき補題 1 より $\Omega(G,\mathcal{D})_{(p)}$ は一般バーンサイド環である. 関係

$$\left(\overline{\langle g\rangle S}\right) \sim_p (S) \quad \text{for} \quad S \in \mathcal{D},\, gS \in (WS)_p$$

により生成される $C(\mathcal{D})$ における同値関係を $\sim_p$ で表す. 同値関係 $\sim_p$ は $\mathcal{D}$ に持ち上げられる. 即ち, $S \sim_p T \Leftrightarrow (S) \sim_p (T)$ とする.

原始べき等元. 有理数体の直積 $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{\Omega}(G,\mathcal{D}) = \prod_{(S)\in C(\mathcal{D})} \mathbb{Q}$ は自然な積（成分ごとの積）で定義される環構造をもつ. $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega(G,\mathcal{D})$ はマーク準同型 $1 \otimes \varphi$ を通して, $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{\Omega}(G,\mathcal{D})$ に同型な

環構造をもつ ([Yd90, Corollary 3.4]). 可換環 $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega(G, \mathcal{D})$ の原始べき等元の集合はすべての $S \in \mathcal{D}$ に対して

$$\varphi_S(e_H) = \begin{cases} 1 & \text{if } (S) = (H), \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

を満たす e_H $((H) \in C(\mathcal{D}))$ から成る.

部分群族 $\mathcal{D}$ に条件 $(\mathbf{C})_p$ を仮定する. 部分群 $Q \in \mathcal{D}$ に対し, べき等元の和 $\sum e_H$ (ただし $e_H \in \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega(G, \mathcal{D})$, $(H) \in C(\mathcal{D})$, $H \sim_p Q$) を e_Q^p で表す ([Yd90, Theorem 4.2]). Yoshida は以下のように $\Omega(G, \mathcal{D})_{(p)}$ のべき等元 e_Q^p $(Q \in \mathcal{D})$ を計算した:

$$e_Q^p = \sum_{(D) \in C(\mathcal{D})} \frac{1}{|WD|} \left(\sum_{H \sim_p Q} \mu_{\mathcal{D}}(D, H) \right) [G/D].$$

補題 2. 部分群族 $\mathcal{D}$ に条件 $(\mathbf{C})_p$ を仮定する. 以下が成り立つ.

1. [Yd90, 4.12] 元 e_Q^p は $\Omega(G, \mathcal{D})_{(p)}$ の原始べき等元である. 逆にすべての $\Omega(G, \mathcal{D})_{(p)}$ の原始べき等元はこの形で表すことができる.

2. [Yd90, 4.12] $\{(Q_1), \ldots, (Q_m)\}$ を $C(\mathcal{D})$ の $\sim_p$-同値類のひとつの完全代表系とする. このとき $\{e_{Q_i}^p\}_{1 \leq i \leq m}$ は $\Omega(G, \mathcal{D})_{(p)}$ のすべての原始べき等元を与える.

3. [Yd90, 5.13] 族 $C_{p'}(\mathcal{D})$ を $C_{p'}(\mathcal{D}) := \{(Q) \in C(\mathcal{D}) \mid WQ \text{ is a } p'\text{-group} \}$ で定義する. $C_{p'}(\mathcal{D})$ は $C(\mathcal{D})$ のひとつの $\sim_p$-同値類の完全代表系である. 特に $\Omega(G, \mathcal{D})_{(p)}$ の単位元は $\sum_{(Q) \in C_{p'}(\mathcal{D})} e_Q^p$ で与えられる.

以上の準備の下で我々の部分群族 $\mathcal{G}_I$ ([Sa, Section2]) を調べる. [Sa, **(SN)**], [Sa, 注意 1] より $\Omega(G, \mathcal{G}_I)$ は一般バーンサイド環であった.

補題 3. $\mathcal{G}_I$ に条件 **(H)** と **(SN)** を仮定する. このとき, $(G_J) \in C(\mathcal{G}_I)$ に対し, 一般バーンサイド環 $\Omega(G, \mathcal{G}_I)$ の原始べき等元 $e_J^p := e_{G_J}^p$ は以下のように表される:

$$e_J^p = \sum_{\emptyset \neq J \subseteq K \subseteq I} \mu_{\mathcal{G}_I}(G_K, G_J)[G/G_K].$$

(H), **(SN)**, 補題 2 等に注意して原始べき等元 e_J^p の係数, 即ち, メビウス関数の値を決定することにより補題 3 は証明できる.

定義 1. 部分群族 $\mathcal{D}$ と単位元をもつ可換環 R に対し, R-加群 $R \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega(G, \mathcal{D})$ は一般バーンサイド環であるとする. $R \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega(G, \mathcal{D})$ の単位元を **Yoshida unit (of G with respect to $\mathcal{D}$)** と呼び $I_{\mathcal{D}}^G$ で表す.

例 1. 部分群族 $\mathcal{D}$ は共通部分をとるという操作で閉じていて, $G \in \mathcal{D}$ を満たすとする. このとき $\mathcal{D}$ はすべての素数 p に対して, 条件 $(\mathbf{C})_p$ を満たすことがわかるので補題 1 より $\Omega(G, \mathcal{D})$ は一般バーンサイド環となる. このとき, Yoshida unit $I_{\mathcal{D}}^G \in \Omega(G, \mathcal{D})$ は 1-点 G-集合 $[G/G]$ である.

一般に $I_{\mathcal{D}}^G$ は $[G/G]$ とはならないことを注意する. たとえば, centric p-radical 部分群族 $\mathcal{C}_p(G)$ ([Sa06, Section 5]) は共通部分をとるという操作で閉じておらず, かつ, G を含まないが, $(\mathbf{C})_p$ を満たすことが知られている (c.f. [Od08]). また, $\mathcal{G}_I$ も $\mathcal{C}_p(G)$ と同様にこの性質を満たしている.

定理 1. 部分群族 $\mathcal{G}_I$ に **(H)** と **(SN)** を仮定する．このとき 一般バーンサイド環 $\Omega(G,\mathcal{G}_I)$ の Yoshida unit $I^G_{\mathcal{G}_I}$ は以下のように表される:

$$I^G_{\mathcal{G}_I} = \sum_{\emptyset\neq J\subseteq I}\sum_{\emptyset\neq K\subseteq I}\mu_{\mathcal{G}_I}(G_K,G_J)[G/G_K]$$
$$= \sum_{\emptyset\neq J\subseteq I}(-1)^{|J|-1}[G/G_J].$$

証明は補題 2，補題 3 より得られる．

2 $I^G_{\mathcal{G}_I}$ が与える一般指標 $Y^G_{\mathcal{G}_I}$

この節では, 一般バーンサイド環 $\Omega(G,\mathcal{D})$ の単位元 $I^G_{\mathcal{D}}$ が与える一般指標 $Y^G_{\mathcal{D}}$ を紹介する．特に，族 $\mathcal{G}_I$ の場合を調べる．

$\Omega(G,\mathcal{D})$ から G の複素数体上の指標環 への自然な群準同型 r は， $[X]\in\Omega(G,\mathcal{D})$ に G-集合 X の置換指標 r_X を対応させる写像を線形に拡張することで与えられる．

定義 2. 一般バーンサイド環 $\Omega(G,\mathcal{D})$ の単位元 $I^G_{\mathcal{D}}$ が与える一般指標 $r(I^G_{\mathcal{D}})$ を **Yoshida character (of G with respect to $\mathcal{D}$)** と呼び $Y^G_{\mathcal{D}}$ で表す．

定理 1 より, G の $\mathcal{G}_I$ に関する Yoshida character $Y^G_{\mathcal{G}_I}$ は以下のように表される:

補題 4. 部分群族 $\mathcal{G}_I$ に **(H)** と **(SN)** を仮定する．このとき

$$Y^G_{\mathcal{G}_I} = \sum_{\emptyset\neq J\subseteq I}\sum_{\emptyset\neq K\subseteq I}\mu_{\mathcal{G}_I}(G_K,G_J)\mathrm{Ind}^G_{G_K}$$
$$= \sum_{\emptyset\neq J\subseteq I}(-1)^{|J|-1}\mathrm{Ind}^G_{G_J}$$

が成り立つ．ただし， $\mathrm{Ind}^G_{G_J}$ は G_J の自明な指標の G への誘導指標である．

次の定理は， $Y^G_{\mathcal{G}_I}$ の G の単位元 1_G における値が，$\mathcal{G}_I$ の包含関係に関する単体的複体 $\Delta(\mathcal{G}_I)$ のオイラー標数 $\chi(\Delta(\mathcal{G}_I))$ を与えることを示している．

定理 2. 部分群族 $\mathcal{G}_I$ は **(H)** と **(SN)** を満たすとする．

1. $\Delta(\mathcal{G}_I)$ のオイラー標数は以下のように表される:

$$\chi(\Delta(\mathcal{G}_I)) = \sum_{\emptyset\neq J\subseteq K\subseteq I}|G:G_K|\mu_{\mathcal{G}_I}(G_K,G_J).$$

2. $Y^G_{\mathcal{G}_I}(1_G)=\chi(\Delta(\mathcal{G}_I))$ が成り立つ．

補題 4，条件 **(H)**，**(SN)** を巧みに使いメビウス関数の値を計算することから定理 2 は証明される．

系 1. 部分群族 $\mathcal{G}_I$ は **(H)** と **(SN)** を満たすとする．このとき次の等式が成立する:

$$\chi(\Delta(\mathcal{G}_I)) = \sum_{\emptyset\neq J\subseteq I}(-1)^{|J|-1}|G:G_J|.$$

例 2. **[Lie type case]** G をランク l の Lie 型の有限群とする．G のひとつの Borel subgroup を含む極大 parabolic subgroups 全体の族を $\mathcal{G} := \{G_1, G_2 \ldots, G_l\}$ とする．$I = \{1, 2, \ldots, l\}$ はインデックス集合である．このとき G の部分群族 $\mathcal{G}_I = \{{}^xG_F \mid x \in G,\ \emptyset \neq F \subseteq I\}$ と G の真の parabolic subgroups 全体は一致すること，$\mathcal{G}_I$ は **(H)** と **(SN)** を満たすことが分かる．補題 4 より Yoshida character with respect to $\mathcal{G}_I$ は以下のように表すことができる:

$$\begin{aligned} Y^G_{\mathcal{G}_I} &= \sum_{\emptyset \neq J \subseteq I} (-1)^{|J|-1} \mathrm{Ind}^G_{G_J} \\ &= \Big(\sum_{J \subseteq I} (-1)^{|J|-1} \mathrm{Ind}^G_{G_J} \Big) + I_G. \end{aligned}$$

ただし，$G_\emptyset := G$，I_G は G の自明な指標とする．従って，

$$Y^G_{\mathcal{G}_I} - I_G = (-1)^{l-1} \sum_{J \subseteq I} (-1)^{l-|J|} \mathrm{Ind}^G_{G_J} = (-1)^{l-1} \mathrm{St}$$

（ただし $\mathrm{St} := \sum_{J \subseteq I} (-1)^{l-|J|} \mathrm{Ind}^G_{G_J}$ は G の Steinberg character (c.f. [Ca85, 6.2.4])）が成り立つ．ゆえに $Y^G_{\mathcal{G}_I} - I_G$ は St modulo sign で与えられる．

参考文献

[Ca85] R. W. Carter, Finite Groups of Lie Type: Conjugacy Classes and Complex Characters, *John Wiley and Sons*, (1985).

[Od08] F. Oda, The generalized Burnside ring with respect to p-centric subgroups, *J. Algebra* **320** (2008), 3726–3732.

[OS09] F. Oda and M. Sawabe, A collection of subgroups for the generalized Burnside ring, *Adv. in Math.* **222** (2009), 307–317.

[OS] F. Oda and M. Sawabe, in preparation.

[Sa06] M. Sawabe, On the reduced Lefschetz module and the centric p-radical subgroups II, *J. London Math. Soc.(2)* **73** (2006), 126–140.

[Sa] M. Sawabe, 一般バーンサイド環のための新たな部分群の族 I, 数理解析研究所講究録「有限群のコホモロジー論の研究」.

[Yd90] T. Yoshida, The generalized Burnside ring of a finite group, *Hokkaido Math. J.* **19** (1990), 509–574.