数理解析研究所講究録
第 1679 巻 2010 年 34-43

Varieties of modules for some selfinjective algebras

Akihiko Hida
Faculty of Education, Saitama University
(飛田明彦　埼玉大学教育学部)

1 Introduction

有限群のモデュラー表現における加群の variety の理論の類似として, 多くの設定への一般化が行われている. 例えば [6], [7] では, support variety と Carlson [4] の rank variety の理論が restricted Lie algebra の場合に展開されている. また [5], [9] では, Hochschild cohomology を利用して support variety の理論が有限次元多元環の場合に研究されている. 一方 [2] では, Carlson [4] の rank variety の理論をある種の有限次元多元環に拡張することが試みられている.

k を正標数 p の代数的閉体とする. $E=\langle g_1,\ldots,g_m\rangle$ を位数 p^m の基本可換 p-群, $x_i=g_i-1\in kE$ とする. $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)(\neq 0)\in k^m$ に対して, $u_\alpha=\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i\in kE$ とおく. $u_\alpha^p=0$ であり, u_α の生成する subalgebra $k[u_\alpha]$ は $k[x]/(x^p)$ と同型である.

有限生成 kE-加群 M に対して,

$$V^r(M)=\{\alpha(\neq 0)\in k^m \mid M \text{ は } k[u_\alpha]\text{-加群として自由加群ではない}\}\cup\{0\}$$

とおく. $k[u_\alpha]$-加群として自由加群ではない, という条件は u_α の M 上の線型写像としての階数により記述され (そのため rank variety と呼ばれている), $V^r(M)$ はある小行列式の零点集合として得られる.

この rank variety は加群の cohomology 的な性質を多く反映しており, 特に cohomology を用いて定義される support variety とも結びつく. [2] ではこの rank variety の特徴として次の 3 点を挙げている.

(1) M の構造から直接計算できる.
(2) 加群の射影性を特徴づける. すなわち, M が射影的であることと, $V^r(M)=\{0\}$ とは同値である (Dade の補題).
(3) テンサー積に関する性質が成り立つ. つまり 2 つの加群のテンサー積の rank variety は 2 つの加群の rank variety の共通部分となる.

[2] ではある種の有限次元多元環について (1)(2) をみたす rank variety を定義しているが, (3) は群環 kE が Hopf algebra であることに依存している, として (3) の性

質は考慮されていない. しかし, これらの多元環は (ある意味で) Hopf algebra の構造を持っており, 次数付き加群のテンサー積 ([3] の意味での捩れテンサー積) が再びその多元環上の加群となることがわかる.

以下の第 2 節と第 3 節では graded Hopf algebra について[1] 整理し, 第 4 節では [2] で quantum complete intersection と呼ばれている algebra が (捩れテンサー積を用いた) graded Hopf algebra となっていることを示す. 第 5 節では rank variety のテンサー積性質について考察する.

2 Graded Hopf algebras

ここでは [3] の twisted tensor product を利用した A-graded k-Hopf algebra について, [1], [8] を参考にまとめておくことにする.

k を体, A を可換な加法群とする. A-graded k-space の全体を A-gr.k-Mod で表す. 以下単に $\otimes$ と書いた場合は k 上のテンサー積を表すこととする. $M, N \in A$-gr.k-Mod に対して degree 0 の線形写像すなわち, degree を保つ線型写像の全体を

$$\mathrm{Hom}_k(M,N)_0 = \{f \in \mathrm{Hom}_k(M,N) \mid f(M_a) \subset N_a,\ \forall a \in A\}$$

とする. 加法群 A, B と $M \in A$-gr.k-Mod, $N \in B$-gr.k-Mod に対して $M \otimes N = \oplus_{(a,b)\in A\oplus B}(M\otimes N)_{(a,b)}$, $(M\otimes N)_{(a,b)} = M_a \otimes N_b$ として, $M \otimes N \in (A \oplus B)$-gr.$k$-Mod となる. 特に $M, N \in A$-gr.k-Mod のときは $(M \otimes N)_a = \oplus_{b+c=a} M_b \otimes N_c$ として $M \otimes N \in A$-gr.k-Mod となる. degree 0 部分が k であり他は 0 である A-graded k-space を単に k で表すことにする.

Definition 2.1. $\Lambda \in A$-gr.k-Mod, degree 0 の k-線型写像 $\mu : \Lambda \otimes \Lambda \longrightarrow \Lambda$, $\eta : k \longrightarrow \Lambda$ が与えられて次の図式

$$\begin{tikzcd}
\Lambda\otimes\Lambda\otimes\Lambda \arrow[r, "\mu\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes\mu"'] & \Lambda\otimes\Lambda \arrow[d, "\mu"] \\
\Lambda\otimes\Lambda \arrow[r, "\mu"'] & \Lambda
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Lambda\otimes\Lambda \arrow[d, "\mu"'] & \Lambda \arrow[l, "\eta\otimes 1"'] \arrow[r, "1\otimes\eta"] \arrow[d, equal] & \Lambda\otimes\Lambda \arrow[d, "\mu"] \\
\Lambda \arrow[r, equal] & \Lambda \arrow[r, equal] & \Lambda
\end{tikzcd}$$

が可換となるとき (Λ, μ, η) を A-graded k-algebra という. $(\Lambda, \mu_\Lambda, \eta_\Lambda)$ と $(\Gamma, \mu_\Gamma, \eta_\Gamma)$ を A-graded k-algebra とする. degree 0 の k 線型写像 $f : \Lambda \longrightarrow \Gamma$ が A-graded k-algebra 準同型であるとは図式

$$\begin{tikzcd}
\Lambda\otimes\Lambda \arrow[r, "\mu_\Lambda"] \arrow[d, "f\otimes f"'] & \Lambda \arrow[d, "f"] \\
\Gamma\otimes\Gamma \arrow[r, "\mu_\Gamma"] & \Gamma
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
k \arrow[r, "\eta_\Lambda"] \arrow[d, equal] & \Lambda \arrow[d, "f"] \\
k \arrow[r, "\eta_\Gamma"] & \Gamma
\end{tikzcd}$$

が可換となることである.

[1]graded Hopf algebra について教えて下さった琉球大学の手塚康誠さんに感謝します.

Definition 2.2. $\Lambda \in A$-gr.k-Mod, degree 0 の k-線型写像 $\Delta : \Lambda \longrightarrow \Lambda \otimes \Lambda$, $\varepsilon : \Lambda \longrightarrow k$ が与えられて次の図式

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{\Delta} & \Lambda \otimes \Lambda \\ {\scriptstyle\Delta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Delta\otimes 1} \\ \Lambda \otimes \Lambda & \xrightarrow[1\otimes\Delta]{} & \Lambda \otimes \Lambda \otimes \Lambda \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} \Lambda \otimes \Lambda & \xleftarrow{\Delta} & \Lambda & \xrightarrow{\Delta} & \Lambda \otimes \Lambda \\ {\scriptstyle\varepsilon\otimes 1}\downarrow & & \| & & \downarrow{\scriptstyle 1\otimes\varepsilon} \\ \Lambda & = & \Lambda & = & \Lambda \end{array}$$

が可換となるとき $(\Lambda, \Delta, \varepsilon)$ を A-graded k-coalgebra という.

$(\Lambda, \Delta_\Lambda, \varepsilon_\Lambda)$, $(\Gamma, \Delta_\Gamma, \varepsilon_\Gamma)$ を A-graded k-coalgebra とする. degree 0 の k-線型写像 $f : \Lambda \longrightarrow \Gamma$ が A-graded k-coalgebra 準同型であるとは図式

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{\Delta_\Lambda} & \Lambda \otimes \Lambda \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f\otimes f} \\ \Gamma & \xrightarrow[\Delta_\Gamma]{} & \Gamma \otimes \Gamma \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{\varepsilon_\Lambda} & k \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \| \\ \Gamma & \xrightarrow[\varepsilon_\Gamma]{} & k \end{array}$$

が可換となることである.

A, B を加法群, $t : A \otimes_{\mathbf{Z}} B \longrightarrow k^\times$ を群準同型とする. $t(a \otimes b)$ を $t^{\langle a|b \rangle}$ と表記する. $\Lambda \in A$-gr.k-Mod, $\Gamma \in B$-gr.k-Mod とする. 写像

$$\tau(t) = \tau(t)_{\Lambda,\Gamma} : \Gamma \otimes \Lambda \longrightarrow \Lambda \otimes \Gamma$$

を, 斉次元 $\lambda \in \Lambda$, $\gamma \in \Gamma$ に対して

$$\tau(t)(\gamma \otimes \lambda) = t^{\langle \deg \lambda | \deg \gamma \rangle} \lambda \otimes \gamma$$

と定義する.

Proposition 2.3. (1)([3]) Λ を A-graded k-algebra, Γ を B-graded k-algebra とする. $(A \oplus B)$-graded k-space としては $\Lambda \otimes^t \Gamma = \Lambda \otimes \Gamma$ とし,

$$\mu_{\Lambda\otimes^t\Gamma} = (\mu_\Lambda \otimes \mu_\Gamma)(1 \otimes \tau(t) \otimes 1) : (\Lambda \otimes \Gamma) \otimes (\Lambda \otimes \Gamma) \longrightarrow \Lambda \otimes \Gamma$$

$$\eta_{\Lambda\otimes^t\Gamma} = \eta_\Lambda \otimes \eta_\Gamma : k \longrightarrow \Lambda \otimes \Gamma$$

と定義すると $(\Lambda \otimes^t \Gamma, \mu_{\Lambda\otimes^t\Gamma}, \eta_{\Lambda\otimes^t\Gamma})$ は $(A \oplus B)$-graded k-algebra となる.
(2) Λ を A-graded k-coalgebra, Γ を B-graded k-coalgebra とする. $(A \oplus B)$-graded k-space としては $\Lambda \otimes^t \Gamma = \Lambda \otimes \Gamma$ とし,

$$\Delta_{\Lambda\otimes^t\Gamma} = (1 \otimes \tau(t)^{-1} \otimes 1)(\Delta_\Lambda \otimes \Delta_\Gamma) : \Lambda \otimes \Gamma \longrightarrow (\Lambda \otimes \Gamma) \otimes (\Lambda \otimes \Gamma)$$

$$\varepsilon_{\Lambda\otimes^t\Gamma} = \varepsilon_\Lambda \otimes \varepsilon_\Gamma : \Lambda \otimes \Gamma \longrightarrow k$$

と定義すると $(\Lambda \otimes^t \Gamma, \Delta_{\Lambda\otimes^t\Gamma}, \varepsilon_{\Lambda\otimes^t\Gamma})$ は $(A \oplus B)$-graded k-coalgebra となる.

Remark 2.4. 特に, $A = B$, $t : A \otimes_{\mathbf{Z}} A :\longrightarrow k^{\times}$ の場合, Λ, Γ がともに A-graded k-algebra ならば $\Lambda \otimes^t \Gamma$ は $(\Lambda \otimes^t \Gamma)_a = \oplus_{b+c=a}(\Lambda_b \otimes \Gamma_c)$ とおいて A-graded k-algebra となり, 一方, Λ, Γ がともに A-graded k-coalgebra ならば $\Lambda \otimes^t \Gamma$ は A-graded k-coalgebra となる.

Definition 2.5. $\Lambda \in A$-gr.k-Mod, $t : A \otimes_{\mathbf{Z}} A \longrightarrow k^{\times}$ とする. 線型写像 $\mu : \Lambda \otimes \Lambda \longrightarrow \Lambda$, $\eta : k \longrightarrow \Lambda$, $\Delta : \Lambda \longrightarrow \Lambda \otimes \Lambda$, $\varepsilon : \Lambda \longrightarrow k$ が与えられ次をみたすとき, $(\Lambda, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, t)$ は A-graded k-bialgebra であるという.

(1) (Λ, μ, η) は A-graded k-algebra.
(2) $(\Lambda, \Delta, \varepsilon)$ は A-graded k-coalgebra.
(3) $\eta : k \longrightarrow \Lambda$ は A-graded k-coalgebra 準同型.
(4) $\varepsilon : \Lambda \longrightarrow k$ は A-graded k-algebra 準同型.
(5) $\Delta : \Lambda \longrightarrow \Lambda \otimes^t \Lambda$ は A-graded k-algebra 準同型.

Remark 2.6. (5) は図式

$$\begin{tikzcd}
\Lambda \otimes \Lambda \arrow[r, equal] \arrow[d, "\Delta\otimes\Delta"'] & \Lambda \otimes \Lambda \arrow[r, "\mu"'] & \Lambda \arrow[d, "\Delta"] \\
\Lambda \otimes \Lambda \otimes \Lambda \otimes \Lambda \arrow[r, "1\otimes\tau(t)\otimes 1"] & \Lambda \otimes \Lambda \otimes \Lambda \otimes \Lambda \arrow[r, "\mu\otimes\mu"] & \Lambda \otimes \Lambda
\end{tikzcd}$$

が可換ということである. $t' : A \otimes_{\mathbf{Z}} A \longrightarrow k^{\times}$, $(t')^{\langle a|b\rangle} = (t^{\langle a|b\rangle})^{-1}$ とおくと, $\tau(t') = \tau(t)^{-1} : \Lambda \otimes \Lambda \longrightarrow \Lambda \otimes \Lambda$ である. 上図式は

$$\begin{tikzcd}
\Lambda \otimes \Lambda \arrow[r, "\Delta\otimes\Delta"] \arrow[d, "\mu"'] & \Lambda \otimes \Lambda \otimes \Lambda \otimes \Lambda \arrow[r, "1\otimes\tau(t')^{-1}\otimes 1"] & \Lambda \otimes \Lambda \otimes \Lambda \otimes \Lambda \arrow[d, "\mu\otimes\mu"] \\
\Lambda \arrow[r, "\Delta"] & \Lambda \otimes \Lambda \arrow[r, equal] & \Lambda \otimes \Lambda
\end{tikzcd}$$

と同じことであり, (5) は

(5') $\mu : \Lambda \otimes^{t'} \Lambda \longrightarrow \Lambda$ は A-graded k-coalgebra 準同型

と言い換えることもできる.

Definition 2.7. A, B を加法群とし, $t_1 : A \otimes_{\mathbf{Z}} A \longrightarrow k^{\times}$, $t_2 : B \otimes_{\mathbf{Z}} B \longrightarrow k^{\times}$, $t_0 : A \otimes_{\mathbf{Z}} B \longrightarrow k^{\times}$ を群準同型とする. $t = t(t_1, t_2, t_0) : (A \oplus B) \otimes_{\mathbf{Z}} (A \oplus B) \longrightarrow k^{\times}$ を

$$t^{\langle (a_1,b_1)|(a_2,b_2)\rangle} = t_1^{\langle a_1|a_2\rangle} t_2^{\langle b_1|b_2\rangle} t_0^{\langle a_1|b_2\rangle} (t_0^{\langle a_2|b_1\rangle})^{-1}$$

と定義する.

Theorem 2.8. $(\Lambda, \mu_1, \eta_1, \Delta_1, \varepsilon_1, t_1)$ を A-graded k-bialgebra, $(\Gamma, \mu_2, \eta_2, \Delta_2, \varepsilon_2, t_2)$ を B-graded k-bialgebra, $t_0 : A \otimes_{\mathbf{Z}} B \longrightarrow k^{\times}$ とし, $t = t(t_1, t_2, t_0)$ を上のように定義する. $R = \Lambda \otimes^{t_0} \Gamma$ とおくと, $(R, \mu_R, \eta_R, \Delta_R, \varepsilon_R, t)$ は $A \oplus B$-graded k-bialgebra である.

Definition 2.9. $(\Lambda, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, t)$ を A-graded k-bialgebra, $S \in \mathrm{Hom}_k(\Lambda, \Lambda)_0$ とする.

$$\mu(S \otimes 1)\Delta = \mu(1 \otimes S)\Delta = \eta\varepsilon$$

となるとき S を Λ の antipode と呼ぶ. antipode S が存在するとき, $(\Lambda, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, t, S)$ を A-graded k-Hopf algebra という.

Proposition 2.10. $(\Lambda, \mu_1, \eta_1, \Delta_1, \varepsilon_1, t_1)$ を A-graded k-bialgebra, $(\Gamma, \mu_2, \eta_2, \Delta_2, \varepsilon_2, t_2)$ を B-graded k-bialgebra, $t_0 : A \otimes_{\mathbf{Z}} B \longrightarrow k^\times$, $t = t(t_1, t_2, t_0)$, $R = \Lambda \otimes^{t_0} \Gamma$ とする. S_1, S_2 をそれぞれ Λ, Γ の antipode とすると, $S_1 \otimes S_2$ は R の antipode である.

$(\Lambda, \Delta, \varepsilon)$ を A-graded k-coalgebra. (Γ, μ, η) を A-graded k-coalgebra とする. $f, g \in \mathrm{Hom}_k(\Lambda, \Gamma)_0$ に対して, $f * g = \mu(f \otimes g)\Delta \in \mathrm{Hom}_k(\Lambda, \Gamma)_0$ とおく.

Lemma 2.11. (1) $f, g, h \in \mathrm{Hom}_k(\Lambda, \Gamma)_0$ に対して, $(f * g) * h = f * (g * h)$.
(2) $f \in \mathrm{Hom}_k(\Lambda, \Gamma)_0$ に対して, $f * \eta\varepsilon = \eta\varepsilon * f = f$.

Proposition 2.12. $(\Lambda, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, t)$ を A-graded k-bialgebra, S を Λ の antipode とする. 斉次元 $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ に対して,

$$S(\lambda_1\lambda_2) = t^{\langle \deg \lambda_2 | \deg \lambda_1 \rangle} S(\lambda_2) S(\lambda_1).$$

Definition 2.13. (1) $(\Lambda, \Delta, \varepsilon)$ を $\mathbf{Z}^m$-graded k-coalgebra とする.
(i) $\Lambda_a \neq 0$, $a = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbf{Z}^m$ ならば $a_i \geq 0$ $(\forall i)$
(ii) $\Lambda_0 = k$, $\varepsilon : \Lambda_0 \longrightarrow k$ は恒等写像
をみたすとき Λ は連結であるという.
(2) (Γ, μ, η) を $\mathbf{Z}^m$-graded k-algebra とする.
(i) $\Gamma_a \neq 0$, $a = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbf{Z}^m$ ならば $a_i \geq 0$ $(\forall i)$
(ii)$\Gamma_0 = k$, $\eta : k \longrightarrow \Gamma_0$ は恒等写像
をみたすとき Γ は連結であるという.

$(\Lambda, \Delta, \varepsilon)$ を連結 $\mathbf{Z}^m$-graded k-coalgebra, (Γ, μ, η) を連結 $\mathbf{Z}^m$-graded k-algebra とする.

$$G(\Lambda, \Gamma) = \{f \in \mathrm{Hom}_k(\Lambda, \Gamma)_0 \mid f_0 : \Lambda_0 \longrightarrow \Gamma_0 \text{は恒等写像}\}$$

とおく. $f, g \in G(\Lambda, \Gamma)$ に対して, $f * g \in G(\Lambda, \Gamma)$ となる. $*$ は結合法則をみたし, $\eta\varepsilon$ が $G(\Lambda, \Gamma)$ の単位元となる. 更に逆元の存在もわかり次が成立する.

Proposition 2.14 ([8]). $*$ に関して $G(\Lambda, \Gamma)$ は群となる.

antipode とは $*$ に関する恒等写像の逆元のことであるので, 次が得られる.

Corollary 2.15. Λ が連結な $\mathbf{Z}^m$-graded k-bialgebra ならば antipode $S : \Lambda \longrightarrow \Lambda$ が存在する. よって Λ は $\mathbf{Z}^m$-graded k-Hopf algebra となる.

$f : A \longrightarrow B$ を加法群の全射準同型とする. $\Lambda \in A$-gr.k-Mod ならば $\Lambda_b = \oplus_{f(a)=b}\Lambda_a$ とおくことで $\Lambda \in B$-gr.k-Mod となる.

Proposition 2.16. $t : A \otimes_{\mathbf{Z}} A \longrightarrow k^\times$, $\tilde{t} : B \otimes_{\mathbf{Z}} B \longrightarrow k^\times$, $t = \tilde{t}(f \otimes f)$ とする. Λ が t に関して A-graded k-bialgebra ならば Λ は $\tilde{t}$ に関して B-graded k-bialgebra となる.

3 Modules and dual spaces

ここでは加群は全て k 上有限次元のものと仮定する. 有限次元 A-graded k-space の全体を A-gr.k-mod, A-graded k-algebra Λ に対して, 有限生成 A-graded Λ-module の全体を A-gr.Λ-mod で表す. Λ を A-graded k-algebra, Γ を B-graded k-algebra, $M \in A$-gr.Λ-mod, $N \in B$-gr.Γ-mod とする. $t : A \otimes_{\mathbf{Z}} B \longrightarrow k^\times$ に対して, k-space としては $M \otimes^t N = M \otimes N$, 斉次元 $\lambda \in \Lambda$, $\gamma \in \Gamma$, $v \in M$, $w \in N$ に対して,

$$(\lambda \otimes \gamma)(v \otimes w) = t^{\langle \deg v | \deg \gamma \rangle} \lambda v \otimes \gamma w$$

と定義すると, $M \otimes^t N$ は $(A \oplus B)$-graded $\Lambda \otimes^t \Gamma$-module となる ([3]).

$(\Lambda, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, t)$ を A-graded k-bialgebra, $M, N \in A$-gr.Λ-mod とする. $\Delta : \Lambda \longrightarrow \Lambda \otimes^t \Lambda$ は A-graded k-algebra 準同型であり, $M \otimes^t N \in A$-gr.Λ-mod となる.

$M \in A$-gr.k-mod, $N \in B$-gr.k-mod に対して,

$$\mathrm{Hom}_k(M, N)_{(a,b)} = \mathrm{Hom}_k(M_{-a}, N_b)$$

$$\mathrm{Hom}_k(M, N) = \oplus_{(a,b) \in A \oplus B} \mathrm{Hom}_k(M, N)_{(a,b)}$$

とおくと $\mathrm{Hom}_k(M, N) \in (A \oplus B)$-gr.$k$-mod である.

特に, $M^* = \mathrm{Hom}_k(M, k) = \oplus_{a \in A} (M^*)_a$, $(M^*)_a = \mathrm{Hom}_k(M_{-a}, k)$ とおくと, $M^* \in A$-gr.k-mod である.

Definition 3.1. $(\Lambda, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, t, S)$, $t : A \otimes_{\mathbf{Z}} A \longrightarrow k^\times$ を A-graded k-Hopf algebra, $M \in A$-gr.Λ-mod とする. 斉次元 $\lambda \in \Lambda$, $f \in M^*$, $v \in M$ に対して,

$$(\lambda f)(v) = t^{\langle \deg f | \deg \lambda \rangle} f(S(\lambda) v)$$

と定義する. $M^* \in A$-gr.Λ-mod となる.

Proposition 3.2. $(\Lambda, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, t_\Lambda, S_\Lambda)$, $t_\Lambda : A \otimes_{\mathbf{Z}} A \longrightarrow k^\times$ を A-graded k-Hopf algebra, Γ を B-graded k-algebra, $t_0 : A \otimes_{\mathbf{Z}} B \longrightarrow k^\times$ とする. $M \in A$-gr.Λ-mod, $N \in B$-gr.Γ-mod とする. 同型

$$M^* \otimes N \cong \mathrm{Hom}_k(M, N)$$

を通して, $\mathrm{Hom}_k(M, N)$ を $\Lambda \otimes^{t_0} \Gamma$-加群とみるとその作用は斉次元 $\lambda \in \Lambda$, $\gamma \in \Gamma$, $\alpha \in \mathrm{Hom}_k(M, N)_{(a,b)}$, $v \in M$ に対して,

$$((\lambda \otimes \gamma)\alpha)(v) = t_0^{\langle a | \deg \gamma \rangle} t_\Lambda^{\langle a | \deg \lambda \rangle} \gamma(\alpha(S_\Lambda(\lambda) v))$$

となる.

Corollary 3.3. 特に, $\Lambda = \Gamma$, $t_\Lambda = t_0 = t$ とおくと, $\mathrm{Hom}_k(M, N)$ への $\Lambda \otimes^t \Lambda$ の作用は斉次元, $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, $\alpha \in \mathrm{Hom}_k(M, N)_{(a,b)}$, $v \in M$ に対して

$$((\lambda_1 \otimes \lambda_2)\alpha)(v) = t^{\langle a | \deg \lambda_1 + \deg \lambda_2 \rangle} \lambda_2(\alpha(S_\Lambda(\lambda_1) v))$$

となる.

4 Quantum complete intersections

$n_1, \ldots, n_m \geq 2$ とし $1 \leq i < j \leq m$ に対して $q_{ij} \in k^\times$ とする.

$$\Lambda = k\langle x_1, \ldots, x_m \rangle / (x_i^{n_i}, x_j x_i - q_{ij} x_i x_j \ (i < j))$$

とおく. Λ は selfinjective k-algebra であり $\dim_k \Lambda = \prod a_i$ である. $e_i \in \mathbf{Z}^m$ を i 番目の成分のみが 1 で他の成分は 0 であるものとする. $\deg x_i = e_i$ として Λ は $\mathbf{Z}^m$-graded k-algebra となっている. $\eta : k \longrightarrow \Lambda_0 = k$ は恒等写像である. Λ は k-algebra としては twisted tensor product を繰り返して得られる ([3]) が, ここでは bialgebra としても twisted tensor product によって得られることを示す.

k の標数 $p > 0$ のときは n_i の p'-part を n'_i, k の標数が 0 のときは $n'_i = n_i$ とし, k における 1 の原始 n'_i 乗根 ζ_i をひとつ固定する.

Definition 4.1. $t : \mathbf{Z}^m \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}^m \longrightarrow k^\times$ を

$$t^{\langle e_i | e_j \rangle} = \begin{cases} q_{ij} & (i < j) \\ \zeta_i & (i = j) \\ q_{ij}^{-1} & (i > j) \end{cases}$$

つまり $a = (a_1, \ldots, a_m), b = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbf{Z}^m$ に対して,

$$t^{\langle a | b \rangle} = \prod_{i=1}^{m} \zeta_i^{a_i b_i} \prod_{1 \leq i < j \leq m} q_{ij}^{a_i b_j - a_j b_i}$$

と定義する.

Theorem 4.2. この t に関して Λ は $\mathbf{Z}^m$-graded k-bialgebra の構造 $(\Lambda, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, t)$ を持つ. ただし μ, η は Λ の algebra 構造から導かれるもの, $\varepsilon : \Lambda \longrightarrow \Lambda/(x_i) \cong k$ であり, $\Delta : \Lambda \longrightarrow \Lambda \otimes \Lambda$ は $\Delta(x_i) = x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i$ をみたす.

Proof. m について帰納法で示す. $m = 1$ のときは, $\Lambda = k[x_1]/(x_1^{n_1})$ である. $t : \mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z} = \mathbf{Z} \longrightarrow k^\times$, $t^{\langle a|b \rangle} = \zeta_1^{ab}$ であり, $\Lambda \otimes^t \Lambda$ では

$$(1 \otimes x_1)(x_1 \otimes 1) = \zeta_1 (x_1 \otimes x_1) = \zeta_1 (x_1 \otimes 1)(1 \otimes x_1)$$

となる. これより,

$$(x_1 \otimes 1 + 1 \otimes x_1)^{n_1} = 0$$

となり

$$\Delta : \Lambda \longrightarrow \Lambda \otimes^t \Lambda, \ \Delta(x_1) = x_1 \otimes 1 + 1 \otimes x_1$$

は k-algebra 準同型となる. よって Λ は $\mathbf{Z}$-graded k-bialgebra となる.

$m > 1$ とする. Λ_1 を $x_1, \ldots, x_{m-1}$ の生成する subalgebra, Λ_2 を x_m の生成する subalgebra とする. 帰納法により Λ_1 は $t_1 : \mathbf{Z}^{m-1} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}^{m-1} \longrightarrow k^\times$ に関して $\mathbf{Z}^{m-1}$-graded k-bialgebra であり, Λ_2 は $t_2 : \mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z} \longrightarrow k^\times$ に関して $\mathbf{Z}$-graded k-bialgebra である. $t_0 : \mathbf{Z}^{m-1} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z} \longrightarrow k^\times$ を

$$t_0^{\langle a|b\rangle} = \prod_{i=1}^{m-1} q_{im}^{a_i b}$$

とおくと $\mathbf{Z}^m$-graded algebra として $\Lambda_1 \otimes^{t_0} \Lambda_2 \cong \Lambda$ である ([3]). このとき, $t = t(t_1, t_2, t_0)$ は

$$\begin{aligned} t^{\langle a|b\rangle} &= t_1^{\langle (a_1,\ldots,a_{m-1})|(b_1,\ldots,b_{m-1})\rangle} t_2^{\langle a_m|b_m\rangle} t_0^{\langle (a_1,\ldots,a_{m-1})|b_m\rangle} (t_0^{\langle (b_1,\ldots,b_{m-1})|a_m\rangle})^{-1} \\ &= \prod_{1\le i\le m-1} \zeta_i^{a_i b_i} \prod_{1\le i<j\le m-1} q_{ij}^{a_i b_j - a_j b_i} \cdot \zeta_m^{a_m b_m} \prod_{1\le i\le m-1} q_{im}^{a_i b_m - a_m b_i} \\ &= \prod_{1\le i\le m} \zeta_i^{a_i b_i} \prod_{1\le i<j\le m} q_{ij}^{a_i b_j - a_j b_i} \end{aligned}$$

となり Definition 4.1 と一致する. Theorem 2.8 より Λ は t に関して $\mathbf{Z}^m$-graded k-bialgebra となる. □

Remark 4.3. $a = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbf{Z}^m$ に対して $\|a\| = \sum a_i$ とおく. $f : \mathbf{Z}^m \longrightarrow \mathbf{Z}$, $f(a_1, \ldots, a_m) = \|a\|$ とする. $\epsilon = 1$ または -1 を固定し, $q_{ij} = \zeta_l = \epsilon$ $(\forall i < j, \forall l)$ と仮定する. $\epsilon^2 = 1$ であることより, $t^{\langle a|b\rangle} = \epsilon^{\|a\|\|b\|}$ となる. $\tilde{t} : \mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z} = \mathbf{Z} \longrightarrow k^\times$ を $\tilde{t}(c) = \epsilon^c$ と定義すると, $\tilde{t}(f \otimes f)(a \otimes b) = \tilde{t}(\|a\|\|b\|) = \epsilon^{\|a\|\|b\|} = t^{\langle a|b\rangle}$ となるので, Proposition 2.16 より Λ は $\tilde{t}$ に関して $\mathbf{Z}$-graded k-bialgebra であり $\deg x_i = 1$ となっている.

5 Rank varieties

n を自然数とする. k の標数が $p > 0$ のときは n の p'-part を n' とし, k の標数が 0 のときは $n' = n$ とする. k における 1 の原始 n'-乗根 ζ をとる. 前節の Λ で $n_i = n$, $q_{ij} = \zeta_i = \zeta$ とおき,

$$\Lambda_m^n = k\langle x_1, \ldots, x_m\rangle / (x_i^n, x_j x_i - \zeta x_i x_j \ (i < j))$$

とおく. $\mathbf{Z}$-bilinear form $\langle\ ,\ \rangle : \mathbf{Z}^m \times \mathbf{Z}^m \longrightarrow \mathbf{Z}$ を

$$\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 1 & (i \le j) \\ -1 & (i > j) \end{cases}$$

と定義すると, $t : \mathbf{Z}^m \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}^m \longrightarrow k^\times$ は $t^{\langle a|b\rangle} = \zeta^{\langle a,b\rangle}$ となる. $\deg x_i = e_i$ として Λ_m^n は t に関して, $\mathbf{Z}^m$-graded k-bialgebra である.

Definition 5.1. $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in k^m$, $\alpha \neq 0$ に対して, $u_\alpha = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \in \Lambda_m^n$ とおく.

Remark 5.2 ([2]). $u_\alpha^n = 0$ であり u_α の生成する subalgebra $k[u_\alpha]$ は $\Lambda_1^n = k[x]/(x^n)$ と同型である.

Definition 5.3 ([2]). $M \in \Lambda_m^n$-mod に対して,

$$V^r(M) = \{\alpha(\neq 0) \in k^m \mid M \text{ は } k[u_\alpha]\text{-加群として自由加群ではない}\} \cup \{0\}$$

とおく. これは k^m の affine subvariety となっており M の rank variety と呼ばれる.

Proposition 5.4 ([2]). M が自由加群であるための必要十分条件は $V^r(M) = \{0\}$ となることである.

以下では, graded Λ-module のテンサー積の rank variety について調べる.

Definition 5.5. $a = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbf{Z}^m$ に対して $\phi_a : k^m \longrightarrow k^m$ を

$$\phi_a(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_m) = (\zeta^{\langle a, e_1 \rangle}\alpha_1, \ldots, \zeta^{\langle a, e_i \rangle}\alpha_i, \ldots, \zeta^{\langle a, e_m \rangle}\alpha_m)$$

と定義する. また, $\|a\| = \sum a_i = \langle a, e_1 \rangle$ とし $C \subseteq \mathbf{Z}^m$ に対して,

$$V_C = \{\alpha \in k^m \mid \phi_a(\alpha) = \zeta^{\|a\|}\alpha, \forall a \in C\}$$

とおく. $M \in \mathbf{Z}^m$-gr.Λ_m^n-mod に対して,

$$s(M) = \{a \in \mathbf{Z}^m \mid M_a \neq 0\}$$

とおく.

Theorem 5.6. $M, N \in \mathbf{Z}^m$-gr.Λ_m^n-mod に対して,

$$V_{s(M)} \cap V^r(M) \cap V^r(N) \subseteq V^r(M \otimes^t N) \subseteq (\cup_{a \in s(M)} \phi_a^{-1}(V^r(M))) \cap V^r(N).$$

これと Proposition 5.4 とをあわせて次が得られる.

Corollary 5.7. 任意の $a \in s(M)$ に対して, $\phi_a^{-1}(V^r(M))) \cap V^r(N) = \{0\}$ ならば $M \otimes^t N$ は projective である.

Remark 5.8. $n' = 1, 2$ のときは $\zeta^2 = 1$ であり, 任意の $a \in \mathbf{Z}^m$ に対して, $\phi_a(\alpha) = \zeta^{\|a\|}\alpha$, $\phi_a^{-1}(V^r(M)) = V^r(M)$ が成立する. よって, テンサー積性質

$$V^r(M \otimes^t N) = V^r(M) \cap V^r(N)$$

が成立する.

$n' = 1, 2$ のときには Remark 4.3 により，Λ_m^n は $\deg x_i = 1$ として $\tilde{t}$ に関して $\mathbf{Z}$-graded k-bialgebra でもあるが $\mathbf{Z}$-graded module についても同様にテンサー積性質が成立する．

Theorem 5.9. $n' \leq 2$ と仮定する．$M, N \in \mathbf{Z}$-gr.Λ_m^n-mod に対して，

$$V^r(M \otimes^{\tilde{t}} N) = V^r(M) \cap V^r(N).$$

Remark 5.10. Theorem 5.6 の評価では幅があり過ぎるため，もう少し詳しい情報を得ることが望まれる．また，Λ_m^n は Corollary 2.15 より $\mathbf{Z}^m$-graded Hopf k-algebra となっており，section 3 で考察した M^*, $\mathrm{Hom}_k(M, N)$ 等の rank variety との関連も調べていく必要がある．

References

[1] 阿部英一, ホップ代数, 岩波書店.

[2] D. J. Benson, K. Erdmann, M. Holloway, Rank varieties for a class of finite-dimensional local algebras, J. Pure and Appl. Algebra 211 (2007), 497-510.

[3] P. A. Bergh and S. Oppermann, Cohomology of twisted tensor products, J. Algebra 320 (2008), 3327-3338.

[4] J. F. Carlson, The varieties and the cohomology ring of a module, J. Algebra 85 (1983), 104-143.

[5] K. Erdmann, M. Holloway, N. Snashall, Ø. Solberg and R. Taillefer, Support varieties for selfinjective algebras, K-Theory 33 (2004), 67-87.

[6] E. M. Friedlander and B. J. Parshall, Support varieties for restricted Lie algebras, Invent. math. 86 (1986), 553-562.

[7] E. M. Friedlander and B. J. Parshall, Geometry of p-unipotent Lie algebras, J. Algebra 109 (1987), 25-45.

[8] J. W. Milnor and J. C. Moore, On the structure of Hopf algebras, Ann. of Math. (2) 81 (1965), 211-264.

[9] N. Snashall and Ø. Solberg, Support varieties and Hochschild cohomology rings, Proc. London Math. Soc. (3) 88 (2004), 705-732.