数理解析研究所講究録
第 1682 巻 2010 年 139-144

ファジィ多目的配置問題における安定性

弘前大学 大学院 理工学研究科　金 正道 (Masamichi KON)
Graduate School of Science and Technology, Hirosaki University

概 要

ファジィ多目的配置問題を考え、需要点および 2 点間の距離を測る距離測度の変化に対するパレート最適解および弱パレート最適解の安定性を調べる。

1. 準備 連続型配置モデルは、一般に需要点とよばれる $\mathbb{R}^n$ の点の有限集合が与えられていると仮定される。需要点は既存の施設または顧客の位置をモデル化したものである。$\boldsymbol{d}_i \in \mathbb{R}^n,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ \ell$ を需要点とし、$\boldsymbol{d} \equiv (\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \cdots, \boldsymbol{d}_\ell) \in \mathbb{R}^{n\ell}$ をパラメータとみなし、$I \equiv \{1,\ 2,\ \cdots,\ \ell\}$ とする。このとき、新たに単一の施設を $\mathbb{R}^n$ に配置する問題は、単一施設配置問題とよばれる。各需要点から施設までの距離が小さいほど望ましいならば、多目的配置問題は、次のような各需要点から施設までの距離を表すベクトル値関数の最小化問題として定式化される。

$$(\mathrm{P}_{\boldsymbol{d}}) \qquad \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{d}) \equiv (\gamma_{\boldsymbol{d}_1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_1), \gamma_{\boldsymbol{d}_2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_2), \cdots, \gamma_{\boldsymbol{d}_\ell}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_\ell))$$

ここで、$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ は施設の位置を表す変数であり、パラメータ $\boldsymbol{d} = (\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \cdots, \boldsymbol{d}_\ell) \in \mathbb{R}^{n\ell}$ を固定したとき $\gamma_{\boldsymbol{d}_i} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i \in I$ はゲージである。各 $i \in I$ と $\boldsymbol{d}_i \in \mathbb{R}^n$ に対して、$B_i(\boldsymbol{d}_i) \subset \mathbb{R}^n$ を原点をその内部に含むコンパクト凸集合とし、ゲージ $\gamma_{\boldsymbol{d}_i} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が

$$\gamma_{\boldsymbol{d}_i}(\boldsymbol{x}) \equiv \inf\{r > 0 : \boldsymbol{x} \in rB_i(\boldsymbol{d}_i)\}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$

によって定義されているとする。このとき、各 $B_i, i \in I$ は $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への集合値写像 (各 $\boldsymbol{d}_i \in \mathbb{R}^n$ に $B_i(\boldsymbol{d}_i) \subset \mathbb{R}^n$ が対応する関係であり、$B_i : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ と表す) となる。各 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ と $\boldsymbol{d}_i \in \mathbb{R}^n$ に対して $\gamma_{\boldsymbol{d}_i}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_i)$ は $\boldsymbol{d}_i$ から $\boldsymbol{x}$ までの距離を表す。多目的配置問題に関して詳しくは [4] およびその参考文献参照。ゲージの詳しい性質は [2, 4, 5, 7] 参照。集合値写像に関して詳しくは [3,6] 参照。

各需要点から施設までの距離が小さいほど望ましい場合は、$(\mathrm{P}_{\boldsymbol{d}})$ の定式化は自然である。施設のある位置に対して、ある 2 つの需要点から施設までの距離が等しいとしても、それぞれの需要点に関する満足度は異なるかもしれない。このような状況も考慮するために、需要点に関する施設の位置に対する満足度を表すメンバーシップ関数を与え、目的関数にメンバーシップ関数を含む最大化問題を考える。各パラメータ $\boldsymbol{d} = (\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \cdots, \boldsymbol{d}_\ell) \in \mathbb{R}^{n\ell}$ に対して、メンバーシップ関数 $\mu_{\boldsymbol{d}_i}: \mathbb{R} \to [0, 1] \equiv \{x \in \mathbb{R}: 0 \le x \le 1\}, i \in I$ が与えられていると仮定する。施設の各位置 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ と $\boldsymbol{d}_i \in \mathbb{R}^n, i \in I$ に対して、$\mu_{\boldsymbol{d}_i}(\gamma_{\boldsymbol{d}_i}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_i))$ は需要点 $\boldsymbol{d}_i$ に関する施設の位置 $\boldsymbol{x}$ に対する満足度を表す。本稿では、各 $\mu_{\boldsymbol{d}_i}, \boldsymbol{d}_i \in \mathbb{R}^n, i \in I$ に対して次を仮定する。

- $x < 0$ に対して $\mu_{\boldsymbol{d}_i}(x) = 0$ である。
- ある $m_{\boldsymbol{d}_i} \geq 0$ および $u_{\boldsymbol{d}_i} > m_{\boldsymbol{d}_i}$ が存在して $\mu_{\boldsymbol{d}_i}(m_{\boldsymbol{d}_i}) = 1$ および $\mu_{\boldsymbol{d}_i}(u_{\boldsymbol{d}_i}) = 0$ となる。
- $\mu_{\boldsymbol{d}_i}$ は $[0, m_{\boldsymbol{d}_i}]$ 上では狭義単調増加であり、$[m_{\boldsymbol{d}_i}, u_{\boldsymbol{d}_i}]$ 上では狭義単調減少であり、$x \in [u_{\boldsymbol{d}_i}, \infty) \equiv \{x \in \mathbb{R} : x \geq u_{\boldsymbol{d}_i}\}$ に対して $\mu_{\boldsymbol{d}_i}(x) = 0$ である。

さらに、次を仮定する。

- ある $u_0 > 0$ が存在して、$\sup\{u_{\boldsymbol{d}_i} : \boldsymbol{d}_i \in \mathbb{R}^n, i \in I\} \leq u_0$ となる。

このとき、**ファジィ多目的配置問題**は次のように定式化される。

$$(\mathrm{FP}_{\boldsymbol{d}}) \qquad \max_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n} \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{d}) \equiv (\mu_{\boldsymbol{d}_1}(\gamma_{\boldsymbol{d}_1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_1)), \mu_{\boldsymbol{d}_2}(\gamma_{\boldsymbol{d}_2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_2)), \cdots, \mu_{\boldsymbol{d}_\ell}(\gamma_{\boldsymbol{d}_\ell}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_\ell)))$$

ここで、$\boldsymbol{d} = (\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \cdots, \boldsymbol{d}_\ell) \in \mathbb{R}^{n\ell}$ である。

定義 1 $\boldsymbol{d} = (\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \cdots, \boldsymbol{d}_\ell) \in \mathbb{R}^{n\ell}$ とする。
(i) 点 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ は $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{d}) \geq \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{d}), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{d}) \neq \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{d})$ となる $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ が存在しないとき $(\mathrm{FP}_{\boldsymbol{d}})$ の**パレート最適解**とよばれる。ここで、$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{d}) \geq \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{d})$ は $\mu_{\boldsymbol{d}_i}(\gamma_{\boldsymbol{d}_i}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_i)) \geq \mu_{\boldsymbol{d}_i}(\gamma_{\boldsymbol{d}_i}(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{d}_i)), i \in I$ を表す。また、$(\mathrm{FP}_{\boldsymbol{d}})$ のパレート最適解 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ に対して $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{d})$ は $(\mathrm{FP}_{\boldsymbol{d}})$ の**パレート最適値**とよばれる。

(ii) 点 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ は $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{d}) > \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{d})$ となる $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ が存在しないとき $(\mathrm{FP}_{\boldsymbol{d}})$ の**弱パレート最適解**とよばれる。ここで、$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{d}) > \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{d})$ は $\mu_{\boldsymbol{d}_i}(\gamma_{\boldsymbol{d}_i}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_i)) > \mu_{\boldsymbol{d}_i}(\gamma_{\boldsymbol{d}_i}(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{d}_i)), i \in I$ を表す。また、$(\mathrm{FP}_{\boldsymbol{d}})$ の弱パレート最適解 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ に対して $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{d})$ は $(\mathrm{FP}_{\boldsymbol{d}})$ の**弱パレート最適値**とよばれる。

(iii) 点 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ は $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{d}) \geq \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{d}), \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0$ となる $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ が存在しないとき $(\mathrm{FP}_{\boldsymbol{d}})$ の**狭義パレート最適解**とよばれる。

(iv) $(\mathrm{FP}_{\boldsymbol{d}})$ のパレート最適解 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ が $(\mathrm{FP}_{\boldsymbol{d}})$ の狭義パレート最適解ではないとき、$\boldsymbol{x}_0$ は $(\mathrm{FP}_{\boldsymbol{d}})$ の**代替的パレート最適解**とよばれる。

パレート最適性について詳しくは、[1, 3, 4] 参照。

集合値写像 $F : \mathbb{R}^{n\ell} \rightsquigarrow \mathbb{R}^\ell$ を $F(\boldsymbol{d}) \equiv \boldsymbol{\mu}(\mathbb{R}^n, \boldsymbol{d}), \boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^{n\ell}$ と定義する。ここで、$\boldsymbol{\mu}(\mathbb{R}^n, \boldsymbol{d}) \equiv \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^\ell : \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{d}), \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}$ である。各 $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^{n\ell}$ に対して $F(\boldsymbol{d}) \neq \emptyset$ となる。

ファジィ多目的配置問題 $(\mathrm{FP}_{\boldsymbol{d}})$ に対して、集合値写像 $M : \mathbb{R}^{n\ell} \rightsquigarrow \mathbb{R}^\ell, WM : \mathbb{R}^{n\ell} \rightsquigarrow \mathbb{R}^\ell, MS : \mathbb{R}^{n\ell} \rightsquigarrow \mathbb{R}^n, WMS : \mathbb{R}^{n\ell} \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ を

$$\begin{aligned}
M(\boldsymbol{d}) &\equiv \{\boldsymbol{y} \in F(\boldsymbol{d}) : (\boldsymbol{y} + \mathbb{R}^\ell_+) \cap F(\boldsymbol{d}) = \{\boldsymbol{y}\}\} \\
WM(\boldsymbol{d}) &\equiv \{\boldsymbol{y} \in F(\boldsymbol{d}) : (\boldsymbol{y} + \mathrm{int}\ \mathbb{R}^\ell_+) \cap F(\boldsymbol{d}) = \emptyset\} \\
MS(\boldsymbol{d}) &\equiv \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{d}) \in M(\boldsymbol{d})\} \\
WMS(\boldsymbol{d}) &\equiv \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{d}) \in WM(\boldsymbol{d})\}
\end{aligned}$$

によって定義し、それぞれ**パレート最適値写像**, **弱パレート最適値写像**, **パレート最適解写像**, **弱パレート最適解写像**とよぶ。ここで、$\mathbb{R}^\ell_+ \equiv \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^\ell : \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\}$ は $\mathbb{R}^\ell$ の非負象限

であり、int $\mathbb{R}^\ell_+$ は $\mathbb{R}^\ell_+$ の内部を表し int $\mathbb{R}^\ell_+ = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^\ell : \boldsymbol{y} > \boldsymbol{0}\}$ である。各 $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^{n\ell}$ に対して、$M(\boldsymbol{d}), WM(\boldsymbol{d}), MS(\boldsymbol{d})$ および $WMS(\boldsymbol{d})$ は、それぞれ $(\mathrm{FP}_{\boldsymbol{d}})$ のすべてのパレート最適値, 弱パレート最適値, パレート最適解および弱パレート最適解の集合である。

つぎの定義 2 および 3 は [1] も参照。

定義 2 集合 $A \subset \mathbb{R}^\ell$ が $\mathbb{R}^\ell_+$**-コンパクト**であるとは、すべての $\boldsymbol{y} \in A$ に対してセクション $(\boldsymbol{y} + \mathbb{R}^\ell_+) \cap A$ がコンパクトになるときをいう。

集合 $A \subset \mathbb{R}^\ell$ に対して、$A_N \equiv \{\boldsymbol{y} \in A : (\boldsymbol{y} + \mathbb{R}^\ell_+) \cap A = \{\boldsymbol{y}\}\}$ を A の**非劣集合**という。各 $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^{n\ell}$ に対して $M(\boldsymbol{d})$ は $F(\boldsymbol{d})$ の非劣集合、すなわち $M(\boldsymbol{d}) = (F(\boldsymbol{d}))_N$ である。

定義 3 集合 $A \subset \mathbb{R}^\ell$ の非劣集合 A_N が**外部安定**であるとは、各 $\boldsymbol{y} \in A \setminus A_N$ に対してある $\overline{\boldsymbol{y}} \in A_N$ が存在して $\boldsymbol{y} \in \overline{\boldsymbol{y}} - \mathbb{R}^\ell_+$ となるときをいう。

次節において集合値写像の連続性を考えるが、集合値写像の連続性および局所有界性に関するつぎの定義 4 および 5 は [6] に従う。

定義 4 $S : \mathbb{R}^p \rightsquigarrow \mathbb{R}^q$ とし、$\overline{\boldsymbol{u}} \in \mathbb{R}^p$ とする。

(i) S が $\overline{\boldsymbol{u}}$ において**上半連続**であるとは、$\boldsymbol{u}_k \to \overline{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{v}_k \to \overline{\boldsymbol{v}}$ かつ $\boldsymbol{v}_k \in S(\boldsymbol{u}_k)(k \in \mathbb{N})$ であるような任意の点列 $\{\boldsymbol{u}_k\} \subset \mathbb{R}^p, \{\boldsymbol{v}_k\} \subset \mathbb{R}^q$ に対して $\overline{\boldsymbol{v}} \in S(\overline{\boldsymbol{u}})$ が成立することである。ここで、$\mathbb{N}$ はすべての自然数の集合である。S がすべての $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^p$ において上半連続のとき、単に S は（$\mathbb{R}^p$ 上で）上半連続であるという。

(ii) S が $\overline{\boldsymbol{u}}$ において**下半連続**であるとは、$\boldsymbol{u}_k \to \overline{\boldsymbol{u}}$ となる任意の点列 $\{\boldsymbol{u}_k\} \subset \mathbb{R}^p$ と任意の $\overline{\boldsymbol{v}} \in S(\overline{\boldsymbol{u}})$ に対して、$\boldsymbol{v}_k \to \overline{\boldsymbol{v}}$ かつ $\boldsymbol{v}_k \in S(\boldsymbol{u}_k)$ $(k \geq k_0, k \in \mathbb{N})$ であるような自然数 $k_0 \in \mathbb{N}$ と点列 $\{\boldsymbol{v}_k\} \subset \mathbb{R}^q$ が存在することである。S がすべての $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^p$ において下半連続のとき、単に S は（$\mathbb{R}^p$ 上で）下半連続であるという。

(iii) S が $\overline{\boldsymbol{u}}$ において上半連続かつ下半連続のとき、S は $\overline{\boldsymbol{u}}$ において**連続**であるという。S がすべての $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^p$ において連続のとき、単に S は（$\mathbb{R}^p$ 上で）連続であるという。

定義 5 $S : \mathbb{R}^p \rightsquigarrow \mathbb{R}^q$ とし、$\overline{\boldsymbol{u}} \in \mathbb{R}^p$ とする。S が $\overline{\boldsymbol{u}}$ において**局所有界**であるとは、$\overline{\boldsymbol{u}}$ のある近傍 $U \subset \mathbb{R}^p$ が存在して $S(U) \subset \mathbb{R}^q$ が有界になるときをいう。ここで、$S(U) \equiv \cup_{\boldsymbol{u} \in U} S(\boldsymbol{u})$ である。S がすべての $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^p$ において局所有界のとき、単に S は（$\mathbb{R}^p$ 上で）局所有界であるという。

定義 6 $i \in I$ とする。メンバーシップ関数の族 $\{\mu_{\boldsymbol{d}_i}\}_{\boldsymbol{d}_i \in \mathbb{R}^n}$ がパラメータ $\boldsymbol{d}_i$ に関して $\overline{\boldsymbol{d}}_i \in \mathbb{R}^n$ において連続であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ が存在し、$\|\boldsymbol{d}_i - \overline{\boldsymbol{d}}_i\| < \delta$ ならばすべての $x \in \mathbb{R}$ に対して $|\mu_{\boldsymbol{d}_i}(x) - \mu_{\overline{\boldsymbol{d}}_i}(x)| < \varepsilon$ となるときをいう。ここで、$\|\cdot\|$ は（$\mathbb{R}^n$ 上の）ユークリッドノルムである。$\{\mu_{\boldsymbol{d}_i}\}$ がパラメータ $\boldsymbol{d}_i$ に関してすべての $\overline{\boldsymbol{d}}_i \in \mathbb{R}^n$ において連続であるとき、単に $\{\mu_{\boldsymbol{d}_i}\}$ はパラメータ $\boldsymbol{d}_i$ に関して連続であるという。

2. 安定性 まず、多目的配置問題 $(\mathrm{P}_{\boldsymbol{d}})$ の目的関数 $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\ell} \to \mathbb{R}^\ell$ の連続性に関する性質を調べる。

定理 1 各 $i \in I$ に対して、$f_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を $f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{d}_i) \equiv \gamma_{\boldsymbol{d}_i}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_i), (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{d}_i) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ とする。このとき、$B_i, i \in I$ が連続かつ局所有界ならば $f_i, i \in I$ は連続である。

以下、本稿を通して多目的配置問題 ($\mathrm{P}_{\boldsymbol{d}}$) の目的関数 $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\ell} \to \mathbb{R}^\ell$ は連続であることを仮定する。定理 1 より、例えば $B_i, i \in I$ が連続かつ局所有界ならば $\boldsymbol{f}$ は連続になる。

定理 2 $\boldsymbol{d} = (\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \cdots, \boldsymbol{d}_\ell) \in \mathbb{R}^{n\ell}$ とする。すべての $\mu_{\boldsymbol{d}_i}, i \in I$ が $[0, \infty)$ 上で上半連続ならば $MS(\boldsymbol{d}) \neq \emptyset$ である。

つぎに、ファジィ多目的配置問題 ($\mathrm{FP}_{\boldsymbol{d}}$) の目的関数 $\boldsymbol{\mu} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\ell} \to \mathbb{R}^\ell$ の連続性に関する性質を調べる。

定理 3 各 $i \in I$ に対して、$g_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ を $g_i(x, \boldsymbol{d}_i) \equiv \mu_{\boldsymbol{d}_i}(x), (x, \boldsymbol{d}_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ とし、$g_i(\cdot, \boldsymbol{d}_i) = \mu_{\boldsymbol{d}_i}(\cdot) : \mathbb{R} \to [0, 1], \boldsymbol{d}_i \in \mathbb{R}^n$ は $[0, \infty)$ 上連続であるとし、メンバーシップ関数の族 $\{\mu_{\boldsymbol{d}_i}\}_{\boldsymbol{d}_i \in \mathbb{R}^n}$ はパラメータ $\boldsymbol{d}_i$ に関して連続であるとする。このとき、$g_i, i \in I$ は $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ 上連続である。

以下、本稿を通してファジィ多目的配置問題 ($\mathrm{FP}_{\boldsymbol{d}}$) の目的関数 $\boldsymbol{\mu} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\ell} \to \mathbb{R}^\ell$ は連続であることを仮定する。定理 3 および $\boldsymbol{f}$ の連続性より、例えば各 $i \in I$ に対して $\mu_{\boldsymbol{d}_i} : \mathbb{R} \to [0, 1], \boldsymbol{d}_i \in \mathbb{R}^n$ が $[0, \infty)$ 上連続でメンバーシップ関数の族 $\{\mu_{\boldsymbol{d}_i}\}_{\boldsymbol{d}_i \in \mathbb{R}^n}$ がパラメータ $\boldsymbol{d}_i$ に関して連続ならば $\boldsymbol{\mu}$ は連続になる。$\boldsymbol{\mu}$ が連続なので、定理 2 およびパレート最適性の定義 1 より、各 $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^{n\ell}$ に対して $M(\boldsymbol{d}) \neq \emptyset, WM(\boldsymbol{d}) \neq \emptyset, MS(\boldsymbol{d}) \neq \emptyset, WMS(\boldsymbol{d}) \neq \emptyset$ となる。

つぎに、集合値写像 $F : \mathbb{R}^{n\ell} \rightsquigarrow \mathbb{R}^\ell$ の連続性に関する性質を調べる。

補題 1 $F : \mathbb{R}^{n\ell} \rightsquigarrow \mathbb{R}^\ell$ は下半連続である。

補題 2 $B_i, i \in I$ は局所有界であるとする。このとき、$F : \mathbb{R}^{n\ell} \rightsquigarrow \mathbb{R}^\ell$ は上半連続である。

補題 1 および 2 より、つぎの補題を得る。

補題 3 $B_i, i \in I$ は局所有界であるとする。このとき、$F : \mathbb{R}^{n\ell} \rightsquigarrow \mathbb{R}^\ell$ は連続である。

つぎに、(連続性以外の) $F : \mathbb{R}^{n\ell} \rightsquigarrow \mathbb{R}^\ell$ に関する性質をさらに調べるために [1] における定理を引用する。

定理 4 ([1] の Theorem 2.21) $A \subset \mathbb{R}^\ell$ を空でない $\mathbb{R}^\ell_+$-コンパクト集合とする。このとき、A の非劣集合 A_N は外部安定になる。

補題 4 各 $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^{n\ell}$ に対して、$F(\boldsymbol{d})$ は $\mathbb{R}^\ell_+$-コンパクトである。

定理 4 と補題 4 よりつぎの定理を得る。

定理 5 各 $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^{n\ell}$ に対して、$M(\boldsymbol{d})$ は 外部安定である。

以上の準備のもとで、まず弱パレート最適値写像 $WM : \mathbb{R}^{n\ell} \rightsquigarrow \mathbb{R}^\ell$ の連続性を考察する。

定理 6 $B_i, i \in I$ は局所有界であるとする。このとき、弱パレート最適値写像 $WM : \mathbb{R}^{n\ell} \rightsquigarrow \mathbb{R}^\ell$ は上半連続である。

つぎの定理は、弱パレート最適値写像 $WM : \mathbb{R}^{n\ell} \rightsquigarrow \mathbb{R}^{\ell}$ が連続となるための条件である。

定理7 $B_i, i \in I$ は局所有界であり、$\overline{\boldsymbol{d}}_0 \in \mathbb{R}^{n\ell}$ とする。このとき、$\overline{\boldsymbol{d}}_0$ において $WM(\overline{\boldsymbol{d}}_0) = M(\overline{\boldsymbol{d}}_0)$ が成立すれば、弱パレート最適値写像 $WM : \mathbb{R}^{n\ell} \rightsquigarrow \mathbb{R}^{\ell}$ は $\overline{\boldsymbol{d}}_0$ において連続である。

つぎに、パレート最適値写像 $M : \mathbb{R}^{n\ell} \rightsquigarrow \mathbb{R}^{\ell}$ の連続性を調べる。

定理8 $B_i, i \in I$ は局所有界であるとする。このとき、パレート最適値写像 $M : \mathbb{R}^{n\ell} \rightsquigarrow \mathbb{R}^{\ell}$ は下半連続である。

定理9 $B_i, i \in I$ は局所有界であり、$\overline{\boldsymbol{d}}_0 \in \mathbb{R}^{n\ell}$ とする。このとき、$\overline{\boldsymbol{d}}_0$ において $WM(\overline{\boldsymbol{d}}_0) = M(\overline{\boldsymbol{d}}_0)$ が成立すれば、パレート最適値写像 $M : \mathbb{R}^{n\ell} \rightsquigarrow \mathbb{R}^{\ell}$ は $\overline{\boldsymbol{d}}_0$ において連続である。

つぎに、弱パレート最適解写像 $WMS : \mathbb{R}^{n\ell} \rightsquigarrow \mathbb{R}^{n}$ およびパレート最適解写像 $MS : \mathbb{R}^{n\ell} \rightsquigarrow \mathbb{R}^{n}$ の連続性を考察する。

定理１０ $B_i, i \in I$ は局所有界であるとする。このとき、弱パレート最適解写像 $WMS : \mathbb{R}^{n\ell} \rightsquigarrow \mathbb{R}^{n}$ は上半連続である。

定理１１ $B_i, i \in I$ は局所有界であり、$\overline{\boldsymbol{d}}_0 \in \mathbb{R}^{n\ell}$ とする。このとき、$\overline{\boldsymbol{d}}_0$ において $WM(\overline{\boldsymbol{d}}_0) = M(\overline{\boldsymbol{d}}_0)$ が成り立ち、かつ $(\mathrm{FP}_{\overline{\boldsymbol{d}}_0})$ の代替的パレート最適解が存在しないならば、弱パレート最適解写像 $WMS : \mathbb{R}^{n\ell} \rightsquigarrow \mathbb{R}^{n}$ は $\overline{\boldsymbol{d}}_0$ において連続である。

定理１２ $B_i, i \in I$ は局所有界であり、$\overline{\boldsymbol{d}}_0 \in \mathbb{R}^{n\ell}$ とする。このとき、$\overline{\boldsymbol{d}}_0$ において $WM(\overline{\boldsymbol{d}}_0) = M(\overline{\boldsymbol{d}}_0)$ が成立すれば、パレート最適解写像 $MS : \mathbb{R}^{n\ell} \rightsquigarrow \mathbb{R}^{n}$ は $\overline{\boldsymbol{d}}_0$ において上半連続である。

定理１３ $B_i, i \in I$ は局所有界であり、$\overline{\boldsymbol{d}}_0 \in \mathbb{R}^{n\ell}$ とする。このとき、$\overline{\boldsymbol{d}}_0$ において $WM(\overline{\boldsymbol{d}}_0) = M(\overline{\boldsymbol{d}}_0)$ が成り立ち、かつ $(\mathrm{FP}_{\overline{\boldsymbol{d}}_0})$ の代替的パレート最適解が存在しないならば、パレート最適解写像 $MS : \mathbb{R}^{n\ell} \rightsquigarrow \mathbb{R}^{n}$ は $\overline{\boldsymbol{d}}_0$ において連続である。

3. 結論 パラメータを含むファジィ多目的配置問題のクラスを考え、パレートおよび弱パレート最適値／解の安定性を調べた。需要点をパラメータとして考え、距離測度およびメンバーシップ関数がそのパラメータに依存するとした。定理６および７において弱パレート最適値写像の連続性を調べ、定理８および９においてパレート最適値写像の連続性を調べ、定理１０および１１において弱パレート最適解写像の連続性を調べ、定理１２および１３においてパレート最適解写像の連続性を調べた。

参考文献

[1] M. Ehrgott, *Multicriteria Optimization: Second Edition* (Springer-Verlag, Berlin, 2005).

[2] J. -B. Hiriart-Urruty and C. Lemaréchal, *Convex analysis and minimization algorithms I: Fundamentals*, (Springer-Verlag, Berlin, 1993).

[3] T. Maeda, *Multiobjective Decision Making Theory and Economic Analysis* (in Japanese), (Makino-Syoten, Japan, 1996).

[4] S. Nickel and J. Puerto, *Location Theory: A Unified Approach* (Springer-Verlag, Berlin, 2005).

[5] R. T. Rockafellar, *Convex analysis*, (Princeton University Press, Princeton, N. J., 1970).

[6] R. T. Rockafellar and R. J-B. Wets, *Variational analysis*, (Springer-Verlag, New York, 1998).

[7] K. Tanaka, *Convex Analysis and Optimization Theory* (in Japanese), (Makino-Syoten, Japan, 1994).