数理解析研究所講究録
第 1682 巻 2010 年 108-114

イベント発生確率が密輸量に依存する取締ゲーム

防衛大学校・理工学研究科　増田　龍一(Ryuichi Masuda)
Graduate School of Science and Engineering,
National Defense Academy
防衛大学校・情報工学科　宝崎　隆祐(Ryusuke Hohzaki)
Department of Computer Science,
National Defense Academy

1　はじめに

本研究では禁制品の密輸を企図する密輸者とパトロールによりそれら違法行為を取締まる取締者による密輸取締ゲームを考える．従来の研究においては，密輸者の戦略として“密輸を行う”か“密輸を行わない”かの戦略を採用しているものが大半であった[1,2,4]．また，密輸者が密輸量に関する戦略を採る研究[3]もなされたが，プレイヤーが共に行動した際に生起する摘発や密輸成功といったイベント発生確率が定数で与えられていたため，結果的には密輸者の量に関する巧妙な戦略が生起しないことを理論的に明らかにできた．したがって，量による密輸取締ゲームとして，もっと拡張したモデルにより議論しなければならないという問題点も浮き彫りにした．

現実的な密輸者の興味は，密輸の成功回数ではなく，その成功量である．したがって本研究では，従来の研究にある多段階[3]及び一段階取締ゲーム[4]の拡張として，密輸量に種々のイベントの発生確率が依存する問題を取り扱う．

2　多段階及び一段階取締ゲームのモデルの前提

ここでは，パトロールを実施するプレイヤーA と，禁制品の密輸を企図するプレイヤーB との間で行われる２人ゼロ和ゲームを考える．

（1）プレイヤーA，B は１日に１回の行動をとる全体で N 日間のゲームを考える．
　　ゲームのステージ数を残日数により表す．

（2）プレイヤーA は最大 K 回パトロールを実施可能である．
　　プレイヤーB は手持禁制品を $M>0$ 個持ち，これの密輸を企図している．
　　$K>N$ のように，パトロール回数が残日数を超過した場合は，その超過回数分は失われる．

（3）各日に，プレイヤーA はパトロールを行う(P)か否(NP)かの２つの戦略をもっており，プレイヤーB は現在の手持量 m を超えない密輸量 $j=0,1,\cdots,m$ の密輸を行う(S(j))という，全体で m+1 個の戦略を持つ．

（4）プレイヤーB による量 j の密輸実行日に，プレイヤーA がパトロールを実施することによ

り，確率 $p_1(j)$でプレイヤーB の摘発が起こるが，同時に摘発を逃れて密輸が成功することも確率 $p_2(j)$で起こる．ただし，$p_1(j) + p_2(j) \leq 1$ とし，$1 - p_1(j) - p_2(j)$の確率で摘発，密輸がともに生じないとする．

ここで，$p_1(0)=0$，$p_2(0)=1$ とし，$p_1(j)$は密輸量 j に対し単調増加，$p_2(j)$は単調減少な関数とする．

パトロールが実施されない日に密輸を決行すれば，密輸は確実に成功する．

（５）プレイヤーB の摘発によるプレイヤーA の利得は α（＞０）であり，密輸量 j の密輸成功によるプレイヤーB の利得は j である．

支払には１日ごとに割引因子 β の割引が発生する．

プレイヤーA の利得がプレイヤーB に同量の損失をもたらし，逆もまた真である２人ゼロ和を支払に対し仮定し，ゲームの支払をプレイヤーA の利得で定義する．

（６）プレイヤーB が摘発されるか，残日数が尽きた場合にゲームは終了する．

（７）情報の取得に関しては次の通りである．

多段階ゲームでは，プレイヤーB が摘発されずに次のステージに移行する際に，それまでの相手プレイヤーの採った行動は互いに知るところとなる．

一段階ゲームでは，ゲーム期間中においては互いの行動に関する情報は一切知ることができない．

以上の前提のもとで行われる２人ゼロ和ゲームについて，第３，４章でそれぞれ多段階ゲーム（モデル１）と一段階ゲーム（モデル２）を考えていく．

３　多段階取締ゲーム（モデル１）の定式化

定式化のために以下の記号を使用する．

n：ゲームの残日数（ステージ番号）

k：現時点以降での取締者のパトロール可能回数

m：現時点の密輸者の手持禁制品量

j：密輸者が密輸を企図する密輸量のインデックス（$j=0,1,\cdots,m$）

$p_1(j)$：密輸者が密輸量 j の密輸を実行した場合のパトロールによる摘発確率

$p_2(j)$：密輸者が密輸量 j の密輸を実行した場合のパトロールに対する密輸成功確率

α：密輸摘発時の取締者の利得

β：割引因子

ゲームの残日数（ステージ数）が n 日，プレイヤーA のパトロール可能回数が k 回，プレイヤーB の手持禁制品量が m の状態にあるゲームを $\Gamma(n,k,m)$ で表すと，そのゲームは次のように表現できる．

$$\Gamma(n,k,m) = \begin{array}{c} \\ P \\ NP \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} S(0) & \cdots & S(j) & \cdots & S(m) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \alpha p_1(j) - jp_2(j) + (1-p_1(j))\beta\Gamma(n-1,k-1,m-j) \\ -j + \beta\Gamma(n-1,k,m-j) \end{pmatrix} \end{array} \tag{1}$$

この行列ゲームにおける２つの行はプレイヤーA の戦略を表し，P はパトロール実施，NP はその未実施に対応している．列の数は m+1 個あり，密輸未実施である S(0)から手持禁制品量全量を密輸する S(m)までがプレイヤーB の戦略に対応しているが，それらを代表して S(j)に関する要素のみを記載している．

ここで，(1)式のゲーム $\Gamma(\mathrm{n,k,m})$ をそのゲームの値 $v(\mathrm{n,k,m})$ で置き換えることにより，この確率多段ゲーム $\Gamma(\mathrm{n,k,m})$ のゲームの値は次のように計算できる．

$$v(n,k,m) = val \begin{array}{c} \\ P \\ NP \end{array} \begin{array}{c} \mathrm{S(0)} \quad \cdots \quad \mathrm{S(j)} \quad \cdots \quad \mathrm{S(m)} \\ \begin{pmatrix} \alpha p_1(j) - jp_2(j) + (1-p_1(j))\beta v(n-1,k-1,m-j) \\ -j + \beta v(n-1,k,m-j) \end{pmatrix} \end{array} \tag{2}$$

(2)式の行及び列の対応についてはゲーム $\Gamma(\mathrm{n,k,m})$ と同様である．ただし，記号 val は，後に続く行列ゲームの値を表している．ステージ n=0 における初期条件や境界条件は次式となる．

$$v(0,k,m) = 0, \quad v(n,0,m) = -m, \quad v(n,k,0) = 0 \tag{3}$$

$$v(n,k,m) = v(n,n,m) \quad (k > n \text{ の場合}) \tag{4}$$

(3)式の第１式の初期条件から出発し，残日数 n を n=1, 2, ･･･, Nと更新していくことにより，逐次的に各ステージにおける均衡解を求めることができる．

4　一段階取締ゲーム（モデル２）の定式化

前章とは情報の取得の仮定で異なり，各プレイヤーは相手の行動に関する情報が入手できないので，問題は N 日間の戦略を一度に決定する一段階のゲームとなる．

各プレイヤーの戦略を表現するため，次の記号を使用する．ゲームは N 日の離散時点 T={1,⋯,N}の順にプレイされる．時点 t∈T におけるプレイヤーA の戦略を，パトロールを実施するならば x(t)=1，未実施ならば x(t)=0 で表す．同様に，時点 t での量 j を密輸するプレイヤーB の戦略を y(t)で表すと，両プレイヤーの純粋戦略は N 次元ベクトル x={x(t),t∈T}および y={y(t),t∈T}で表される．ただし，前提(2)にある通り，プレイヤーA には最大パトロール回数の制約が，プレイヤーB には手持禁制品量の制約があり，以下が課される．

$$\sum_{t=1}^{N} \mathrm{x(t)} \le K, \quad \sum_{t=1}^{N} \mathrm{y(t)} \le \mathrm{M} \tag{5}$$

ここで，プレイヤーA，B それぞれの純粋戦略 **x**，**y** に対するプレイヤーA の期待利得を求めると次のようになる．

まず，時点 n でのゲームを考えよう．ゲーム開始時点から時点 n の前日までにプレイヤーA のパトロールとプレイヤーB の密輸量 j の密輸が同日に起こる回数 $\mathrm{T_j(n)}$ は，x(t)=1，y(t)=j(j≠0)のときのみ 1 となり，その他の x(t)，y(t)の組合せには 0 となるような項をもつ次式により表現することができる．

$$\mathrm{T_j(n)} = \sum_{t=1}^{n-1} \frac{{}_{M}\mathrm{C_j y(t) x(t) (-1)^{j-1}} \prod_{k=1,k\neq j}^{M} (\mathrm{k - y(t)})}{\mathrm{m!}} \tag{6}$$

両プレイヤーがともに行動を起こした場合，前提(4)及び(6)から，確率 $p_1(j)$ で摘発されゲームが終了することから，前日まで摘発が起こらずに時点 n に到達する確率は $\prod_{j=1}^{M}(1-p_1(j))^{T_j(n)}$ となる．

また，時点 n おいてプレイヤーA がパトロールを行い，プレイヤーB が密輸量 j の密輸を実行した場合のプレイヤーA の期待利得は，前提(4)及び(5)から確率 $p_1(j)$ でプレイヤーB を摘発して利得 α を得るか，確率 $p_2(j)$ で密輸成功を許して j の損失を被るかの可能性から，$\alpha p_1(j) - jp_2(j)$ と書ける．この式は，密輸が行われない j=0 の場合でも期待利得が $\alpha p_1(j) - jp_2(j) = 0$ となり正しい．また，パトロールが実施されない状況においてプレイヤーB が密輸量 j の密輸を実行した場合は，前提(4)から密輸は確実に成功し，プレイヤーA は j の損失を被る．以上のことから，時点 n でのプレイヤーA の期待利得は

$$x(n)\{\alpha p_1(y(n)) - y(n)p_2(y(n))\} - \{1 - x(n)\}y(n) \tag{7}$$

と書ける．これまでの議論から，全期間における期待支払 $R(\mathbf{x},\mathbf{y})$ は次式により求められる．

$$R(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{n=1}^{N}\left[x(n)\{\alpha p_1(y(n)) - y(n)p_2(y(n))\} - (1 - x(n))y(n)\right]\beta^{n-1}\prod_{j=1}^{M}(1 - p_1(j))^{T_j(n)} \tag{8}$$

(8)式は，プレイヤーA が純粋戦略 $\mathbf{x}=\{x(t), t\in \mathbf{T}\}$ を，プレイヤーB が純粋戦略 $\mathbf{y}=\{y(t), t\in \mathbf{T}\}$ を採った場合のゲームの支払関数である．両プレイヤーの純粋戦略に対して，この支払関数を用いてそれぞれの支払を計算することにより，両プレイヤーが認識する支払行列を作成することができる．因みに，プレイヤーA の純粋戦略 $\mathbf{x}$ の全体は，(5)式の第 1 式を満たす 0 - 1 変数 $x(t)$ の組合せすべてであり，プレイヤーB の純粋戦略 $\mathbf{y}$ の全体は，(5)式の第 2 式を満たす非負の整数 $y(t)$ のすべての組合せとなる．

5　数値例

ゲームの設定を日数 N=1～4，最大パトロール回数 K=1～N，手持禁制品量 M=1～4，摘発時の利得 α=2 及び割引因子 β=1，0.6 とし，すべての組合せに対してモデル 1，2 のゲームの値及び両プレイヤーの最適戦略を計算した．なお，摘発確率 $p_1(j)$ 及び密輸成功確率 $p_2(j)$ の設定は表 1 を使用した．また，密輸者と取締者が共に行動した際の期待利得 $\alpha p_1(j)$-$jp_2(j)$ は図 1 となる．

表 1　摘発確率 $p_1(j)$ 及び密輸成功確率 $p_2(j)$ の設定

j	0	1	2	3	4
$p_1(j)$	0	0.1	0.45	0.7	0.8
$p_2(j)$	1	0.9	0.55	0.2	0.1

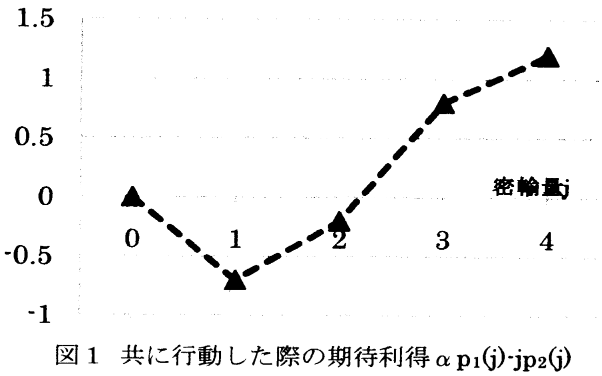

図 1　共に行動した際の期待利得 $\alpha p_1(j)$-$jp_2(j)$

5.1　ゲームの値の一般的性質

表 2，3 は，上記設定において β=1.0 におけるモデル 1，2 のゲームの値を表したものである．

表２　モデル１のゲームの値

N	K	M 1	M 2	M 3	M 4
1	1	-0.700	-0.700	-0.700	-0.700
2	1	-0.850	-1.629	-1.991	-2.276
	2	-0.700	-1.330	-1.330	-1.330
3	1	-0.900	-1.761	-2.557	-3.086
	2	-0.800	-1.537	-2.166	-2.398
	3	-0.700	-1.330	-1.897	-1.897
4	1	-0.925	-1.823	-2.685	-3.488
	2	-0.850	-1.652	-2.392	-3.017
	3	-0.775	-1.487	-2.123	-2.649
	4	-0.700	-1.330	-1.897	-2.407

表３　モデル２のゲームの値

N	K	M 1	M 2	M 3	M 4
1	1	-0.700	-0.700	-0.700	-0.700
2	1	-0.850	-1.621	-1.800	-1.800
	2	-0.700	-1.330	-1.330	-1.330
3	1	-0.900	-1.767	-2.557	-2.973
	2	-0.800	-1.543	-2.163	-2.216
	3	-0.700	-1.330	-1.897	-1.897
4	1	-0.925	-1.825	-2.700	-3.496
	2	-0.850	-1.655	-2.414	-3.032
	3	-0.775	-1.490	-2.143	-2.648
	4	-0.700	-1.330	-1.897	-2.407

ゲームの値については，次の自明な４つの性質が言える．

（１）ゲームの値はすべて非正である．

（２）n の増加に対してゲームの値は単調非増加である．

（３）k の増加に対してゲームの値は単調非減少である．

（４）m の増加に対してゲームの値は単調非増加である．

上記の性質は，他のパラメータ設定に対しても一般的に言える性質である．

5.2　モデル１に関する β の感度分析

ここでは，密輸に絡む商取引においても通常の取引と同じく，売買契約における納期遅延により信頼関係が損なわれたり，また密輸遅延による密輸品の商品価値の劣化など，密輸を遅らせることによる損失が考えられる．そこで，割引因子 β を 0.6 とした場合の密輸者の戦略に与える影響に関する感度分析を行う．ここで，ステージ毎の密輸量の期待値により評価するために以下のような処理を実施する．ステージ s において密輸者が密輸量 j を密輸する確率を $\rho_s(j)$ とすると，ステージ s における密輸量の期待値は，$\sum_{j=0}^{m} j\rho_s(j)$ により評価することができる．

図２は N=4，K=3 のゲームの状態において，密輸者の手持量 M=1〜4 に対して β を 1 から 0.6 に変化させた場合の初期ステージにおける密輸者の密輸量の期待値を表している．

β=1 では手持量 M が小さい場合には密輸が消極的であるのに対し，β=0.6 では手持量 M に関係なく j=1 の密輸がコンスタントに実施されていることが分かる．これは，β=0.6 では将来における密輸成功の利益の割引を考え，早期密輸への動機が強まるからである．取締者は，密輸者の早期密輸の実施意図を予想できるので，早い時点におけるパトロール実施による早期摘発を企図しようとする．今度は，密輸者がそのような取締者の行動を予想できるので，密輸者はパトロール時の密輸で最も利益が大きくなるように j=1 の密輸を実施しようとする．β=0.6 における定常的な密輸量は以上のように説明できる．

5.3　モデル２に関する β の感度分析

前節と同様に，β に関する密輸者のステージ４における密輸量の期待値を表したのが図３であ

る．モデル１とよく似た結果となっており，β に対する密輸者の傾向が同じであることが分かる．

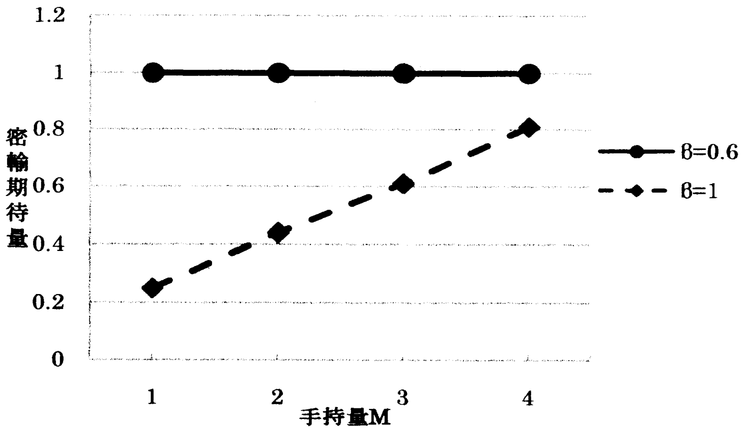

図２ ステージ４での密輸量の期待値（モデル１）

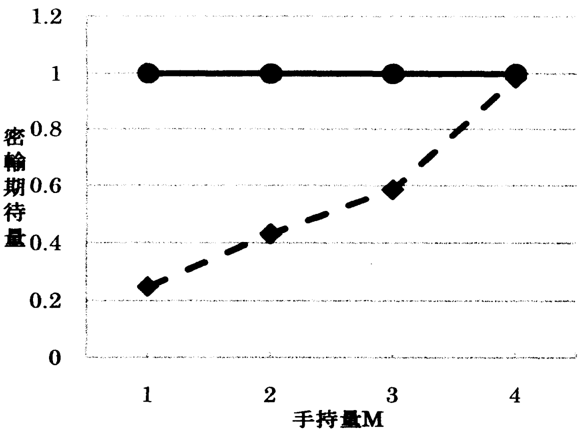

図３ ステージ４での密輸量の期待値（モデル２）

５.４　モデル１とモデル２の比較分析

ここからは，モデル１とモデル２のゲームの値を比較することにより，プレイヤーが持つ相手の行動情報が与える効果について分析していく．表５は N=1～7，K=1～N，M=1～7 のすべての組合せに対するゲームの値を上段にモデル１の場合を，下段にモデル２の場合を記している．ただし，摘発確率 $p_1(j)$ 及び密輸成功確率 $p_2(j)$ は表４を使用し，α=2.0，β=1.0 とし計算を実施した．

表４　摘発確率 $p_1(j)$ 及び密輸成功確率 $p_2(j)$ の設定

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$p_1(j)$	0	0.05	0.125	0.225	0.4	0.575	0.675	0.75	0.8
$p_2(j)$	1	0.925	0.825	0.7	0.55	0.4	0.275	0.175	0.1

表５において影が付いている部分は，モデル２よりモデル１の方がゲームの値が大きくなるケースを表している．N,M が大きくなるにつれて，影の部分が多くなっていることが見てとれ，これは次の理由により説明できる．

モデル１では，プレイヤーは各時点においてそれまでの相手の行動情報を入手でき，モデル２ではそのような情報を入手できない．したがって，取締者は密輸者の採り得る戦略として(5)式の第２式 $\sum_{t=1}^{N} y(t) \le M,\ y(t) \in \{0,\cdots,M\}$ を満たすすべての戦略を考慮する必要がある．

同様に，密輸者も取締者のパトロール戦略として，(5)式の第１式の $\sum_{t=1}^{N} x(t) = K,\ x(t) \in \{0,1\}$ の条件を満たすすべての戦略を考えなければならない．これらの純粋戦略の多さを比較すれば，N，K，M といった問題のサイズが大きい場合，密輸者の採る戦略の数は圧倒的に多く，モデル１で情報が得られる場合の相手戦略を考慮の対象外とできる限定効果は取締者側に有利である．そのためモデル１では，ゲームの値が大きくなると考えられる．

また，残日数と残りパトロール回数が等しい N=K では，取締者が常にパトロールを実施することは予見できるため，相手情報は両プレイヤーとも必要ではなく，ゲームの値は同じとなる．

表５　モデル１，２のゲームの値

N	K	M=1	2	3	4	5	6	7
1	1	-0.85	-1.40	-1.40	-1.40	-1.40	-1.40	-1.40
		-0.85	-1.40	-1.40	-1.40	-1.40	-1.40	-1.40
2	1	-0.93	-1.82	-2.58	-3.27	-3.70	-4.05	-4.36
		-0.93	-1.82	-2.58	-3.26	-3.67	-3.93	-4.08
	2	-0.85	-1.66	-2.18	-2.66	-2.66	-2.66	-2.66
		-0.85	-1.66	-2.18	-2.66	-2.66	-2.66	-2.66
3	1	-0.95	-1.88	-2.78	-3.62	-4.40	-5.14	-5.76
		-0.95	-1.88	-2.79	-3.62	-4.42	-5.15	-5.73
	2	-0.90	-1.77	-2.58	-3.26	-3.86	-4.35	-4.70
		-0.90	-1.77	-2.58	-3.25	-3.87	-4.37	-4.61
	3	-0.85	-1.66	-2.42	-2.92	-3.38	-3.79	-3.79
		-0.85	-1.66	-2.42	-2.92	-3.38	-3.79	-3.79
4	1	-0.96	-1.91	-2.84	-3.75	-4.62	-5.46	-6.26
		-0.96	-1.91	-2.85	-3.76	-4.63	-5.46	-6.27
	2	-0.93	-1.83	-2.69	-3.52	-4.27	-4.95	-5.57
		-0.93	-1.83	-2.70	-3.53	-4.27	-4.96	-5.59
	3	-0.89	-1.74	-2.55	-3.30	-3.94	-4.48	-4.95
		-0.89	-1.74	-2.56	-3.30	-3.93	-4.49	-4.97
	4	-0.85	-1.66	-2.42	-3.15	-3.63	-4.06	-4.45
		-0.85	-1.66	-2.42	-3.15	-3.63	-4.06	-4.45
5	1	-0.97	-1.93	-2.88	-3.81	-4.73	-5.62	-6.48
		-0.97	-1.93	-2.88	-3.82	-4.73	-5.62	-6.48
	2	-0.94	-1.86	-2.76	-3.63	-4.46	-5.25	-5.98
		-0.94	-1.86	-2.76	-3.64	-4.47	-5.25	-5.99
	3	-0.91	-1.79	-2.64	-3.45	-4.21	-4.91	-5.52
		-0.91	-1.79	-2.65	-3.47	-4.23	-4.91	-5.53
	4	-0.88	-1.72	-2.53	-3.28	-3.98	-4.59	-5.10
		-0.88	-1.73	-2.54	-3.30	-3.99	-4.59	-5.10
	5	-0.85	-1.66	-2.42	-3.15	-3.85	-4.29	-4.71
		-0.85	-1.66	-2.42	-3.15	-3.85	-4.29	-4.71
6	1	-0.98	-1.94	-2.90	-3.85	-4.78	-5.70	-6.60
		-0.98	-1.94	-2.90	-3.85	-4.79	-5.70	-6.60
	2	-0.95	-1.88	-2.80	-3.69	-4.57	-5.41	-6.22
		-0.95	-1.88	-2.80	-3.70	-4.58	-5.42	-6.22
	3	-0.93	-1.83	-2.70	-3.55	-4.36	-5.13	-5.86
		-0.93	-1.83	-2.71	-3.56	-4.37	-5.14	-5.86
	4	-0.90	-1.77	-2.61	-3.41	-4.16	-4.87	-5.51
		-0.90	-1.77	-2.61	-3.42	-4.18	-4.88	-5.52
	5	-0.88	-1.71	-2.51	-3.27	-3.98	-4.63	-5.21
		-0.88	-1.71	-2.52	-3.28	-3.99	-4.64	-5.21
	6	-0.85	-1.66	-2.42	-3.15	-3.85	-4.50	-4.93
		-0.85	-1.66	-2.42	-3.15	-3.85	-4.50	-4.93
7	1	-0.98	-1.95	-2.91	-3.87	-4.81	-5.75	-6.67
		-0.98	-1.95	-2.91	-3.87	-4.82	-5.75	-6.68
	2	-0.96	-1.90	-2.83	-3.74	-4.63	-5.51	-6.36
		-0.96	-1.90	-2.83	-3.75	-4.64	-5.52	-6.37
	3	-0.94	-1.85	-2.74	-3.61	-4.46	-5.27	-6.06
		-0.94	-1.85	-2.75	-3.62	-4.47	-5.29	-6.07
	4	-0.91	-1.80	-2.66	-3.49	-4.29	-5.05	-5.76
		-0.91	-1.80	-2.66	-3.50	-4.30	-5.06	-5.78
	5	-0.89	-1.75	-2.58	-3.37	-4.12	-4.83	-5.49
		-0.89	-1.75	-2.58	-3.38	-4.14	-4.85	-5.50
	6	-0.87	-1.71	-2.50	-3.26	-3.97	-4.63	-5.25
		-0.87	-1.71	-2.50	-3.27	-3.98	-4.64	-5.26
	7	-0.85	-1.66	-2.42	-3.15	-3.85	-4.50	-5.13
		-0.85	-1.66	-2.42	-3.15	-3.85	-4.50	-5.13

6　おわりに

本研究では，密輸量がイベントの発生確率に影響する仮定を組み込んだ多段階及び一段階取締ゲームのモデルを取扱い，数値例を用いた感度分析によりパラメータ及び行動情報の有無が両プレイヤーに与える効果について分析した．

ここで取り扱った取締ゲームは，各プレイヤーが相手の行動情報を“入手できる”，あるいは“できない”といった情報取得に対称性のある仮定のもとでのゲームであった．しかし，違法行為を行う密輸者の行動には隠密性があり，逆に公的機関である取締者の行動は比較的透明性があるため，プレイヤーの情報取得に対称性が満たされない状況が現実的に考えられる．

そこで今後の課題として，密輸者はステージ移行の際にそれまで相手の採った行動情報を入手できるが，取締者は相手の行動情報を一切入手できないような，プレイヤーの持つ相手行動情報に非対称性のある密輸取締ゲームを考えることで，より現実に近い問題になると思われる．

参考文献

[1] M. Sakaguchi, Mathematica Japonica, 39, pp.157-166, 1994.

[2] R. Hohzaki, D. Kudoh and T. Komiya, Naval Research Logistics, 53, pp.761-771, 2006.

[3] 宝崎，数理解析研究所講究録 1629, pp.45-55, 2009.

[4] 前原，宝崎，数理解析研究所講究録 1548, pp.91-98, 2007.