

# 単調作用素の零点問題と収縮射影法

東京工業大学・大学院情報理工学研究科  
木村泰紀 (Yasunori Kimura)

## 1 はじめに

実バナッハ空間  $E$  とその共役空間  $E^*$  に対し集合値写像  $A : E \rightrightarrows E^*$  を定義する.  $A$  の零点問題, すなわち,  $0 \in Az$  をみたす  $z \in E$  を求める問題を考えよう. とくに  $A$  が単調作用素のとき, この問題の解に対する近似点列を求める手法は, 有名な近接点法 [12, 16] による弱収束定理が Rockafellar によって証明されて以来, Brézis and Lions [3], Passty [15], Solodov and Svaiter [17], Kamimura and Takahashi [7], Kohsaka and Takahashi [11], Kimura, Nakajo, and Takahashi [9] 等に見られるよう, 多くの研究がなされている.

一方, 2008 年には, Takahashi, Takeuchi, and Kubota [19] によって, 非拡大写像の不動点へ強収束する近似点列を求める手法が開発された. これは後に収縮射影法と呼ばれるようになり, 上記の問題へも応用できることが示されている. 最近の結果としては, Kimura and Takahashi [10] において, より弱い空間の条件のもとで, 収縮射影法による強収束定理が得られている.

本稿では [10] で導入された集合値解析の手法を用いた証明法を利用することにより, 単調作用素の族に対する共通零点を求める定理を証明する. 主定理は [8] の結果をさらに一般化させたものである.

## 2 準備

本稿では  $E$  はつねに実バナッハ空間をあらわし,  $E^*$  はその共役空間とする.  $E$  および  $E^*$  のノルムはともに  $\|\cdot\|$  であらわし,  $x^* \in E^*$  の  $x \in E$  での値は  $\langle x, x^* \rangle$  であらわす.

---

*Key words and phrases.* Relatively nonexpansive mapping, approximation, hybrid method, shrinking projection method, maximal monotone operator, resolvent, metric projection  
*2000 Mathematics Subject Classification.* 47H09, 47J25

集合値写像  $J : E \rightrightarrows E^*$  が

$$Jx = \{x^* \in E^* : \|x\|^2 = \langle x, x^* \rangle = \|x^*\|^2\}$$

と定義されるとき,  $J$  を双対写像という.  $E$  が回帰的かつ狭義凸で滑らかなバナッハ空間のとき,  $J$  は全単射な一価写像となる. さらに, このときは双対写像の定義から  $E^*$  上の双対写像  $J^*$  が  $J$  の逆写像となることがわかる. また,  $E$  が Fréchet 微分可能なノルムを持つときは,  $J$  はノルム位相からノルム位相の意味で連続な写像となる.

$x \in E$  に弱収束する  $E$  の点列  $\{x_n\}$  が  $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$  をみたすときに  $\{x_n\}$  が  $x$  に強収束することが導かれるとき,  $E$  は Kadec-Klee 条件をみたすという.  $E^*$  が Fréchet 微分可能なノルムをもつことと,  $E$  が Kadec-Klee 条件をみたす回帰的で狭義凸なバナッハ空間であることは同値である. 詳細は [18] を参照せよ.

回帰的バナッハ空間  $E$  の空でない閉凸集合列を  $\{C_n\}$  とする. これに対して  $s\text{-Li}_n C_n$  および  $w\text{-Ls}_n C_n$  を

$$\begin{aligned} s\text{-Li}_n C_n &= \{x \in E : \exists \{x_n\}, x_n \rightarrow x, x_n \in C_n (\forall n \in \mathbb{N})\}, \\ w\text{-Ls}_n C_n &= \{x \in E : \exists \{x_{n_i}\}, x_{n_i} \rightarrow x, x_{n_i} \in C_{n_i} (\forall i \in \mathbb{N})\} \end{aligned}$$

で定義する. ここで  $x_{n_i} \rightarrow x$  は  $\{x_{n_i}\}$  が  $x$  に弱収束することをあらわしている.  $E$  の閉凸集合  $C_0$  に対して  $C_0 = s\text{-Li}_n C_n = w\text{-Ls}_n C_n$  が成り立つとき,  $\{C_n\}$  は  $C_0$  に Mosco 収束する [14] といい,

$$C_0 = \text{M-lim}_{n \rightarrow \infty} C_n$$

とあらわす. 詳細は [2] を参照せよ.

$E$  を回帰的かつ狭義凸で滑らかなバナッハ空間とし,  $\phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  を,  $x, y \in E$  に対して

$$\phi(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy \rangle + \|y\|^2$$

で定義する.  $C$  を  $E$  の空でない閉凸集合とするとき, 写像  $S : C \rightarrow C$  が relatively nonexpansive [4, 5, 6, 13] であるとは,  $F(S) = \hat{F}(S) \neq \emptyset$  であり, さらに任意の  $z \in F(S)$  と  $x \in C$  に対して  $\phi(z, Sx) \leq \phi(z, x)$  が成り立つことをいう. ただし,  $F(S)$ ,  $\hat{F}(S)$  はそれぞれ  $S$  の不動点集合および漸近的不動点集合, すなわち

$$\begin{aligned} F(S) &= \{z \in C : z = Sz\}, \\ \hat{F}(S) &= \{u \in C : \exists \{u_n\} \subset C, u_n \rightarrow u, \|u_n - Su_n\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)\} \end{aligned}$$

で定義される.

$E$  から  $E^*$  への多価写像  $A$  が単調作用素であるとは, 任意の  $x, y \in E$  と  $x^* \in Ax, y^* \in Ay$  に対して

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$$

が成り立つことをいう. 単調作用素  $A$  が極大であるとは,  $A$  をグラフとして含む作用素  $B$  が単調ならば  $A = B$  が導かれることをいう.  $\rho > 0$  とするとき, 単調作用素  $A$  のリゾルベントを  $(J + \rho A)^{-1}J$  で定義する.  $E$  を回帰的で狭義凸かつ滑らかなバナッハ空間とすると双対写像  $J$  は全単射となることから, このとき  $A$  が極大単調作用素ならば, リゾルベントは  $E$  から  $E$  への一価写像となる. 詳細は [1] を参照せよ.

本節の最後に, 主定理の証明において必要な定理を述べておく.

**定理 2.1** (Tsukada [20]).  $E$  を回帰的かつ狭義凸なバナッハ空間で Kadec-Klee 条件をみたすものとし,  $\{C_n\}$  を  $E$  の空でない閉凸集合の列とする. 各  $n \in \mathbb{N}$  に対し,  $P_{C_n}$  を  $E$  から  $C_n$  への距離射影とする. このとき,  $M\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = C_0$  が存在して空でないならば, 任意の  $x \in E$  に対して  $\{P_{C_n}x\}$  は  $P_{C_0}x \in C$  に強収束する.

**定理 2.2** (Kohsaka-Takahashi [11]).  $E$  を回帰的かつ狭義凸で滑らかなバナッハ空間とし,  $A : E \rightrightarrows E^*$  を極大単調作用素とする. このとき  $\rho > 0$  に対して

$$\phi(z, (J + \rho A)^{-1}Jx) \leq \phi(z, (J + \rho A)^{-1}Jx) + \phi((J + \rho A)^{-1}Jx, x) \leq \phi(z, x)$$

が任意の  $z \in A^{-1}0$  と  $x \in E$  について成り立つ.

### 3 共通零点問題に対する収縮射影法

**定理 3.1.**  $E$  を回帰的で狭義凸なバナッハ空間とし, Fréchet 微分可能なノルムをもち, Kadec-Klee 条件をみたすと仮定する.  $I$  を高々可算の添字集合とし,  $\{A_j : j \in I\}$  を  $E$  から  $E^*$  への極大単調作用素の族で  $Z = \bigcap_{j \in I} A_j^{-1}0$  が空でないと仮定する.  $i : \mathbb{N} \rightarrow I$  を, 各  $j \in I$  に対して  $N_j = i^{-1}(j) \subset \mathbb{N}$  が無限集合となるような写像とし,  $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$  を, 各  $j \in I$  に対して  $\liminf_{k \in N_j, k \rightarrow \infty} \alpha_{i(k)} < 1$  をみたす数列とする. また,  $\{\rho_n\} \subset ]0, \infty[$  を  $\inf_{n \in \mathbb{N}} \rho_n > 0$  をみたす数列とする.  $E$  の点列  $\{x_n\}$  を次のように定義しよう.  $x_1 \in E, C_1 = E$  とし, 各  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$\begin{aligned} y_n &= J^*(\alpha_n Jx_n + (1 - \alpha_n)J(J + \rho_n A_{i(n)})^{-1}Jx_n), \\ C_{n+1} &= \{u \in E : \phi(u, y_n) \leq \phi(u, x_n)\} \cap C_n, \\ x_{n+1} &= P_{C_{n+1}}x \end{aligned}$$

とする。ただし  $P_K$  は空でない閉凸集合  $K$  への距離射影である。このとき  $\{x_n\}$  は  $P_Z x$  に強収束する。

**証明.**  $C_1 = E$  は空でない閉凸集合であり、明らかに  $Z$  を含む。また、 $x_1$  は与えられた点である。ここで、 $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$  がそれぞれ  $Z$  を含む空でない閉凸集合であると仮定し、 $C_{n+1}$  も空でない閉凸集合で  $Z \subset C_{n+1}$  をみたすことを示そう。このとき、仮定より  $x_n = P_{C_n} x$  は既に定義されている。

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= \{u \in E : \phi(u, y_n) \leq \phi(u, x_n)\} \cap C_n \\ &= \{u \in E : 2\langle u, Jx_n - Jy_n \rangle + \|y_n\|^2 - \|x_n\|^2 \leq 0\} \cap C_n \end{aligned}$$

より、 $C_{n+1}$  は閉凸集合であることがわかる。 $n \in \mathbb{N}$  に対して  $w_n = (J + \rho_n A_{i(n)})^{-1} Jx_n$  とし、 $z \in Z$  とすると定理 2.2 より

$$\begin{aligned} \phi(z, y_n) &= \|z\|^2 - 2\langle z, Jy_n \rangle + \|y_n\|^2 \\ &= \|z\|^2 - 2\langle z, \alpha_n Jx_n + (1 - \alpha_n)Jw_n \rangle + \|\alpha_n Jx_n + (1 - \alpha_n)Jw_n\|^2 \\ &\leq \|z\|^2 - 2\alpha_n \langle z, Jx_n \rangle - 2(1 - \alpha_n) \langle z, Jw_n \rangle + \alpha_n \|x_n\|^2 + (1 - \alpha_n) \|w_n\|^2 \\ &= \alpha_n \left( \|z\|^2 - 2\langle z, Jx_n \rangle + \|x_n\|^2 \right) + (1 - \alpha_n) \left( \|z\|^2 - 2\langle z, Jw_n \rangle + \|w_n\|^2 \right) \\ &= \alpha_n \phi(z, x_n) + (1 - \alpha_n) \phi(z, w_n) \\ &= \alpha_n \phi(z, x_n) + (1 - \alpha_n) \phi(z, (J + \rho_n A_{i(n)})^{-1} Jx_n) \\ &= \alpha_n \phi(z, x_n) + (1 - \alpha_n) \phi(z, x_n) \\ &= \phi(z, x_n). \end{aligned}$$

よって  $z \in C_{n+1}$  であり、 $Z \subset C_{n+1}$  が示された。 $Z$  は空でないので  $C_{n+1}$  も空でない閉凸集合であることがわかった。以上によって  $\{x_n\}$  が妥当な定義となっていることが示された。 $\{C_n\}$  は包含関係に関して非増加なので、

$$\text{M-lim}_{n \rightarrow \infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \supset Z \neq \emptyset$$

が成り立つ。よって、 $C_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$  とすると定理 2.1 より  $\{x_n\}$  は  $x_0 = P_{C_0} x$  に強収束する。このとき  $x_0$  は任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $C_n$  に属する点となるので

$$0 \leq \phi(x_0, y_n) \leq \phi(x_0, x_n).$$

ここで  $n \rightarrow \infty$  とすると,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(x_0, x_n) = 0$  であることから, 数列  $\{\phi(x_0, y_n)\}$  は 0 に収束することがわかる. よって

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\|x_0\| - \|y_n\|)^2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(x_0, y_n) = 0$$

となり,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| = \|x_0\|$  を得る. ここで  $j \in I$  を固定すると, 仮定より  $N_j = i^{-1}(j)$  は無限集合なので,  $N_j$  のある部分列  $\{n_k\}$  で  $\{\alpha_{n_k}\}$  がある  $\alpha_0 \in [0, 1[$  に収束し, かつ  $\{Jy_{n_k}\}$  がある  $y_0^* \in E^*$  に弱収束するものが存在する. よって

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \phi(x_0, y_{n_k}) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\|x_0\|^2 - 2 \langle x_0, Jy_{n_k} \rangle + \|y_{n_k}\|^2) \\ &= 2 \|x_0\|^2 - 2 \lim_{k \rightarrow \infty} \langle x_0, Jy_{n_k} \rangle \\ &= 2(\|x_0\|^2 - \langle x_0, y_0^* \rangle) \end{aligned}$$

となり, これより

$$\|x_0\|^2 = \langle x_0, y_0^* \rangle \leq \|x_0\| \|y_0^*\| \leq \|x_0\| \lim_{k \rightarrow \infty} \|Jy_{n_k}\| = \|x_0\|^2.$$

したがって  $\|x_0\|^2 = \langle x_0, y_0^* \rangle = \|y_0^*\|^2$  となり  $Jx_0 = y_0^*$  を得る. このことから

$$\|Jx_0\| = \|x_0\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|y_{n_k}\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|Jy_{n_k}\|$$

となり,  $E^*$  が Kadec-Klee 条件をみたすことから  $\{Jy_{n_k}\}$  は  $Jx_0$  に強収束することがわかる. さらに  $J^*$  のノルム位相からノルム位相での連続性を用いると  $\{y_{n_k}\}$  は  $x_0$  に強収束する. 一方,  $k \in \mathbb{N}$  に対して

$$\begin{aligned} \|Jx_0 - Jw_{n_k}\| &\leq \|Jx_0 - Jx_{n_k}\| + \|Jx_{n_k} - Jw_{n_k}\| \\ &= \|Jx_0 - Jx_{n_k}\| + \frac{1}{1 - \alpha_{n_k}} \|Jx_{n_k} - Jy_{n_k}\| \end{aligned}$$

であるから,  $k \rightarrow \infty$  とすると

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|Jx_0 - Jw_{n_k}\| = 0$$

が得られる. 再び  $J^*$  の連続性から  $\{w_{n_k}\}$  も  $x_0$  に強収束する. ここで  $v \in E$  と  $v^* \in E^*$  を  $v^* \in A_j v$  をみたす任意の元としよう.  $\{n_k\}$  は  $N_j$  の部分列であるから  $i(n_k) = j$  であり,

$$w_{n_k} = (J + \rho_{n_k} A_{i(n_k)})^{-1} Jx_{n_k} = (J + \rho_{n_k} A_j)^{-1} Jx_{n_k}$$

より

$$\frac{1}{\rho_{n_k}}(Jx_{n_k} - Jw_{n_k}) \in A_j w_{n_k}$$

が任意の  $k \in \mathbb{N}$  で成り立つ.  $A_j$  の単調性より,  $k \in \mathbb{N}$  に対して

$$\left\langle w_{n_k} - v, \frac{1}{\rho_{n_k}}(Jx_{n_k} - Jw_{n_k}) - v^* \right\rangle \geq 0.$$

$k \rightarrow \infty$  とすると

$$\langle x_0 - v, 0 - v^* \rangle \geq 0$$

が得られ,  $A_j$  が極大単調作用素であることを用いると  $0 \in A_j x_0$  が得られる.  $j \in I$  は任意だったので  $x_0 \in \bigcap_{j \in I} A_j^{-1} 0 = Z$  となり,  $Z \subset C_0$  より  $x_0 = P_Z x$  であることが示された.  $\square$

この定理において,  $I$  が有限集合  $\{0, 1, 2, \dots, N-1\}$  のときは,  $i: \mathbb{N} \rightarrow I$  として,  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$i(n) = n \bmod N$$

とすれば, 定理の仮定はみたされ, 次の定理を得る.

**定理 3.2** (Kimura [8]).  $E$  を回帰的で狭義凸なバナッハ空間とし, Fréchet 微分可能なノルムをもち, Kadec-Klee 条件をみたすと仮定する.  $N \in \mathbb{N}$  に対して  $I = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$  を添字集合とし,  $\{A_j : j \in I\}$  を  $E$  から  $E^*$  への極大単調作用素の族で  $Z = \bigcap_{j \in I} A_j^{-1} 0$  が空でないと仮定する.  $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$  を, 各  $j \in I$  に対して  $\liminf_{k \rightarrow \infty} \alpha_{Nk+j} < 1$  をみたす数列とする. また,  $\{\rho_n\} \subset ]0, \infty[$  を  $\inf_{n \in \mathbb{N}} \rho_n > 0$  をみたす数列とする.  $E$  の点列  $\{x_n\}$  を次のように定義しよう.  $x_1 \in E$ ,  $C_1 = E$  とし, 各  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$\begin{aligned} y_n &= J^*(\alpha_n Jx_n + (1 - \alpha_n)J(J + \rho_n A_{(n \bmod N)})^{-1} Jx_n), \\ C_{n+1} &= \{u \in E : \phi(u, y_n) \leq \phi(u, x_n)\} \cap C_n, \\ x_{n+1} &= P_{C_{n+1}} x \end{aligned}$$

とする. ただし  $P_K$  は空でない閉凸集合  $K$  への距離射影である. このとき  $\{x_n\}$  は  $P_Z x$  に強収束する.

一方,  $I$  が可算集合のときは  $I = \mathbb{N}$  とみなすことができ, 例えば  $i: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  を

$$\begin{aligned} i(1) &= 1, \\ i(2) &= 1, \quad i(3) = 2, \end{aligned}$$

$$i(4) = 1, i(5) = 2, i(6) = 3,$$

$$i(7) = 1, i(8) = 2, i(9) = 3, i(10) = 4, \dots$$

のように定義すれば, この  $i$  は定理の仮定をみたすことがわかる.

## 参考文献

- [1] V. Barbu and T. Precupanu, *Convexity and optimization in Banach spaces*, revised ed., Editura Academiei, Bucharest, 1978, Translated from the Romanian.
- [2] G. Beer, *Topologies on closed and closed convex sets*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.
- [3] H. Brézis and P.-L. Lions, *Produits infinis de résolvantes*, Israel J. Math. **29** (1978), 329–345.
- [4] D. Butnariu, S. Reich, and A. J. Zaslavski, *Asymptotic behavior of relatively nonexpansive operators in Banach spaces*, J. Appl. Anal. **7** (2001), 151–174.
- [5] D. Butnariu, S. Reich, and A. J. Zaslavski, *Weak convergence of orbits of nonlinear operators in reflexive Banach spaces*, Numer. Funct. Anal. Optim. **24** (2003), 489–508.
- [6] Y. Censor and S. Reich, *Iterations of paracontractions and firmly nonexpansive operators with applications to feasibility and optimization*, Optimization **37** (1996), 323–339.
- [7] S. Kamimura and W. Takahashi, *Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space*, SIAM J. Optim. **13** (2002), 938–945 (electronic) (2003).
- [8] Y. Kimura, *Shrinking projection methods and common zero point problems for a finite family of maximal monotone operators*, Proceedings of the Sixth International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, to appear.
- [9] Y. Kimura, K. Nakajo, and W. Takahashi, *Strongly convergent iterative schemes for a sequence of nonlinear mappings*, J. Nonlinear Convex Anal. **9** (2008), 407–416.
- [10] Y. Kimura and W. Takahashi, *On a hybrid method for a family of relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, J. Math. Anal. Appl. **357** (2009), 356–363.
- [11] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Strong convergence of an iterative sequence for*

- maximal monotone operators in a Banach space*, Abstr. Appl. Anal. (2004), 239–249.
- [12] B. Martinet, *Régularisation d'inéquations variationnelles par approximations successives*, Rev. Française Informat. Recherche Opérationnelle **4** (1970), 154–158.
- [13] S. Matsushita and W. Takahashi, *A strong convergence theorem for relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, J. Approx. Theory **134** (2005), 257–266.
- [14] U. Mosco, *Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities*, Adv. in Math. **3** (1969), 510–585.
- [15] G. B. Passty, *Ergodic convergence to a zero of the sum of monotone operators in Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. **72** (1979), 383–390.
- [16] R. T. Rockafellar, *Monotone operators and the proximal point algorithm*, SIAM J. Control Optim. **14** (1976), 877–898.
- [17] M. V. Solodov and B. F. Svaiter, *Forcing strong convergence of proximal point iterations in a Hilbert space*, Math. Program. **87** (2000), 189–202.
- [18] W. Takahashi, *Nonlinear functional analysis: fixed point theory and its applications*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.
- [19] W. Takahashi, Y. Takeuchi, and R. Kubota, *Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces*, J. Math. Anal. Appl. **341** (2008), 276–286.
- [20] M. Tsukada, *Convergence of best approximations in a smooth Banach space*, J. Approx. Theory **40** (1984), 301–309.