数理解析研究所講究録
第 1685 巻 2010 年 243-248

ベクトル値準凸制約をもつ最適化問題

島根大学大学院 総合理工学研究科 下村 拓也 (Takuya Shimomura)
Interdisciplinary Graduate School of Science and Engineering, Shimane University
島根大学大学院 総合理工学研究科 鈴木 聡 (Satoshi Suzuki)
Interdisciplinary Graduate School of Science and Engineering, Shimane University
島根大学 総合理工学部 黒岩 大史 (Daishi Kuroiwa)
Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering, Shimane University

概 要

最適化問題において双対定理を考える際,「制約想定」は重要かつ不可欠な要素である. 近年, 凸最適化問題において双対定理が成立するための最弱の制約想定が Goberna, Jeyakumar, López によって示された. また Jeyakumar はこの結果をベクトル値制約をもつ凸最適化問題に拡張した. 一方, 鈴木, 黒岩は準凸最適化問題に関する最弱の制約想定について研究した. 本論文では, ベクトル値制約をもつ準凸最適化問題に関する制約想定を述べ, 最適性条件について特徴付けを行う.

1 導入

まず, 問題 (P)

$$\text{(P)} \quad \begin{aligned} &\min f(x) \\ &\text{s.t. } g_i(x) \leq 0,\ i \in I \end{aligned}$$

に関する Lagrange 双対性の定理を紹介する.

定理 1. X は Banach 空間, $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を連続な凸関数, $g_i : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ $(i \in I = \{1, 2, \cdots, m\})$ を下半連続な真凸関数とし, 条件

$$\exists x_0 \in X \text{ s.t. } \forall i \in I,\ g_i(x_0) < 0 \tag{CQ1}$$

を満たすとする. このとき,

$$\inf_{x \in S} f(x) = \max_{\lambda \in \mathbb{R}^m_+} \inf_{x \in X} \{f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)\}$$

が成り立つ. ただし, $S = \{x \in X \mid \forall i \in I,\ g_i(x) \leq 0\}$.

定理 1 は問題 (P) が別の問題に置き換えられることを保証している. ここで (CQ1) は Slater 条件と言われ, 定理 1 の等式が成り立つための十分条件である. このような, 制約に関する最適性のための十分条件のことを制約想定という. これまでに様々な制約想定が提案されているが, 不等式制約条件のみを含む問題に対する代表

的な制約想定として Cottle 制約想定, Abadie 制約想定, Guignard 制約想定などがあり, これらの条件の強弱関係は Slater, Cottle, Abadie, Guignard の順番で弱くなっていることが知られている [8]. そして 2008 年に定理 1 の等式が成り立つ最も弱い制約想定が示された [2].

定理 2. ([2]) X は Banach 空間, X^* は X の共役空間, $g_i : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (I は添字集合, $i \in I$), 下半連続かつ真凸, $S = \{x \in X \mid \forall i \in I,\ g_i(x) \leq 0\} \neq \emptyset$ とする. このとき次は同値である.

1. $\operatorname{coneco} \bigcup_{i \in I} \operatorname{epi} g_i{}^*$ が汎弱閉, (CQ2)

2. $\forall f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ with $\begin{cases} \text{下半連続, 真, 凸,} \\ S \cap \operatorname{dom} f \neq \emptyset, \\ \operatorname{epi} f^* + \operatorname{epi} \delta_S^* \text{が汎弱閉,} \end{cases}$ に対して,

$$\inf_{x \in S} f(x) = \max_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(I)}} \inf_{x \in X} \{f(x) + \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(x)\}.$$

ただし, $\mathbb{R}_+^{(I)} = \{\lambda \in \mathbb{R}^I \mid \forall i \in I,\ \lambda_i \geq 0,\ \{i \in I \mid \lambda_i \neq 0\}$ が有限集合 $\}$.

この定理より, (CQ2) は 2 の条件をみたす全ての凸関数 f について Lagrange 双対性の等式が成り立つ必要十分条件である, すなわち, この意味で最も弱い制約想定であるといえる. また Jeyakumar は, この結果をベクトル値制約をもつ凸最適化問題に拡張した [3].

一方, 鈴木, 黒岩は準凸最適化問題に関する最弱の制約想定について研究した [7]. 制約関数が準凸関数の場合には Goberna, Jeyakumar, López と同様の議論は使えないが, Penot, Volle によって示された「準凸関数がある有界線形関数とある非減少かつ下半連続な関数の合成関数の上限で表される」[6] という事実が非常に重要な働きをしている.

本論文では, 上記鈴木, 黒岩の結果を, ベクトル値制約を持つ準凸最適化問題に拡張することを考える. 第 2 章において定理 2 の拡張である Jeyakumar による結果 [3] を述べ, また第 3 章において鈴木, 黒岩の結果 [7] を紹介する. そして第 4 章において, まずは本研究で重要な役割をなす Benoist, Borwein の結果 [1] を紹介し, 最後にベクトル値制約を持つ準凸最適化問題に対する制約想定を述べ, 最適性条件との特徴付けを行う.

2 ベクトル値凸制約をもつ凸最適化問題について

以下この論文では X, Y を Banach 空間, X^*, Y^* をそれぞれ X, Y の共役空間, $K \subsetneq Y$ を内点が空でない閉凸錐, $K \cap (-K) = \{0\}$, $K^+ = \{y^* \in Y^* \mid \langle y^*, y \rangle \geq$

$0, \forall y \in K\}$ とし, $y_1, y_2 \in Y$ に対して, $y_2 - y_1 \in K$ を満たすとき, $y_1 \leq_K y_2$ と表すとする.

この章では制約関数をベクトル値凸関数の場合について Jeyakumar が研究した結果を紹介する.

定義 1. $\forall x_1, x_2 \in X, \forall \alpha \in (0, 1), G((1-\alpha)x_1 + \alpha x_2) \leq_K (1-\alpha)G(x_1) + \alpha G(x_2)$ を満たすとき, $G : X \to Y$ が K-凸であるという.

制約関数をベクトル値関数にすることで, 実数値関数の場合と比べ不等式制約が一般化される. 実際 $i \in I$, $g_i(x) \leq 0$ という条件が $G(x) \leq_K 0$ となるためこの制約条件は K によって依存する. 制約関数がベクトル値凸関数の場合について Jeyakumar によって次の定理が示された.

定理 3. ([3]) $G : X \to Y$ は連続かつ K-凸, $S = \{x \in X \mid G(x) \leq_K 0\} \neq \emptyset$ とする. このとき次は同値である.

1. $\bigcup_{\lambda \in K^+} \mathrm{epi}(\lambda \circ G)^*$ が汎弱閉, (CQ3)

2. $\forall f : X \to \mathbb{R}$, 連続, 凸,

$$\inf_{x \in S} f(x) = \max_{y^* \in K^+} \inf_{x \in X} \{f(x) + \langle y^*, G(x) \rangle\}.$$

3 実数値準凸制約をもつ凸最適化問題について

ここまでは制約関数が凸関数の場合について紹介してきたが, ここからは制約関数を準凸関数に拡張して考える. まず, 鈴木, 黒岩によって研究された実数値関数での結果を紹介する.

定義 2. $g : X \to [-\infty, \infty]$ が準凸関数であるとは $\forall x_1, x_2 \in X, \forall \alpha \in (0, 1), g((1-\alpha)x_1 + \alpha x_2) \leq \max\{g(x_1), g(x_2)\}$ を満たすときをいう.

関数が準凸関数のときには, 凸で成り立っている多くの事実が成り立たない. 実際, 定理 1 の右辺では $f + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i$ を考えるが, f, $g_i(\forall i \in I)$ が凸関数の場合は $f + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i$ は凸関数になる. 一方, $g_i(\forall i \in I)$ が準凸関数の場合は $f + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i$ が準凸関数になっている保証が無い. この欠点を回避する方法として定理 4 が Penot, Volle によって示された. 2009 年に鈴木, 黒岩が generator という概念を用いて, 問題 (P) を別の問題に置き換えられることを [7] で示した. 次の定理 4 は準凸関数を考える際に有用な結果である. 以下, $Q = \{h : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty] \mid h$ は下半連続, 非減少 $\}$ とする.

定理 4. ([6]) $g : X \to [-\infty, \infty]$ とする. このとき次は同値である.

1. g が下半連続, 準凸,

2. $\exists I$: 添字集合, $\exists\{(k_i, w_i) \mid i \in I\} \subseteq Q \times X^*$ s.t. $g = \sup\{k_i \circ w_i \mid i \in I\}$

定義 3. ([7]) 定理 4 のように $g = \sup\{k_i \circ w_i \mid i \in I\}$ と表されているとき, $\{(k_i, w_i) \mid i \in I\} \subseteq Q \times X^*$ を g の generator という.

定義 4. ([6, 7]) $g \in Q$ に対して, g^{-1}: $\mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ を $g^{-1}(s) \overset{\text{def}}{=} \sup\{r \in \mathbb{R} \mid g(r) \leq s\}$ $(\forall s \in \mathbb{R})$ と定義し, この g^{-1} を g の hypo-epi-inverse という.

ここで, $\mathbb{R}^T = \{\lambda \mid \lambda : T \to \mathbb{R}\}$, $\mathbb{R}^{(T)} = \{\lambda : T \to \mathbb{R} \mid \{\alpha \in T \mid \lambda(\alpha) \neq 0\}$ が有限集合 $\}$ (T は添字集合) とする. このとき $\mathbb{R}^{(T)} \subseteq \mathbb{R}^T$ である.

定理 5. ([7]) $g_i : X \to [-\infty, \infty]$ (I は添字集合, $i \in I$), 下半連続, 準凸, 任意の $i \in I$ に対して, $\{(k_{(i,j)}, w_{(i,j)}) \mid j \in J_i\} \subseteq Q \times X^*$を g_i の generater とし, $S = \{x \in X \mid \forall i \in I, g_i(x) \leq 0\} \neq \emptyset$ とする. このとき次は同値である.

1. $\operatorname{coneco} \bigcup_{t\in T} \{(w_t, \delta) \in X^* \times \mathbb{R} \mid (k_t)^{-1}(0) \leq \delta\} + \{0\} \times [0, \infty)$ が汎弱閉, (CQ4)

2. $\forall f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ with $\begin{cases} \text{下半連続, 真, 凸,} \\ S \cap \operatorname{dom} f \neq \emptyset, \\ \operatorname{epi} f^* + \operatorname{epi} \delta_S^* \text{が汎弱閉,} \end{cases}$ に対して,

$$\inf_{x\in S} f(x) = \max_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}} \left\{ -f^*\left(-\sum_{t\in T} \lambda_t w_t \right) - \sum_{t\in T} \lambda_t (k_t)^{-1}(0) \right\},$$

ただし $T = \{(i, j) \mid i \in I, j \in J_i\}$.

$\forall i \in I$, g_i が下半連続, 真, 凸のときは, 定理 5 の (2) は定理 2 の (2) と一致することが [7] で示されている. したがって, 定理 5 は定理 2 の拡張になっている.

4 ベクトル値準凸制約をもつ凸最適化問題について

最後に制約関数がベクトル値準凸関数の場合について特徴付ける. その際に定理 5[7] とこの章で示す定理 6[1] を用いる.

定義 5. $\forall y \in Y$, $\forall x_1, x_2 \in X$, $\forall \alpha \in (0, 1)$, $G(x_1) \leq_K y$ かつ $G(x_2) \leq_K y$ ならば, $G((1-\alpha)x_1 + \alpha x_2) \leq_K y$. を満たすとき, $G : X \to Y$ が K-準凸であるという.

G が K-凸であることと, 任意の $y^* \in K^+$に対して, $y^* \circ G$ が凸であることが同値であることが知られているが, K-準凸のときはうまくいかない. この問題は, Benoist, Borwein, Popovici によって extream direction という概念を用いて解決された [1].

定義 6. ([1]) $\xi \in K \setminus \{0\}$, $\forall \xi_1, \xi_2 \in K$ かつ $\xi = \xi_1 + \xi_2$, $\xi_1, \xi_2 \in \{t\xi \mid t \geq 0\}$ を満たすとき, ξ を K の extream direction といい, その全体を $\mathrm{extd}K$ と表す.

定理 6. ([1]) $\mathrm{clco}(\mathrm{extd}K^+) = K^+$, $G : X \to Y$ とする. このとき次は同値である.

1. G が K-準凸,

2. $\forall \xi \in \mathrm{extd}K^+$, $\xi \circ G$ が準凸.

定理 7. $\mathrm{clco}(\mathrm{extd}K^+) = K^+$, $G : X \to Y$, 連続な K-準凸, 任意の $\xi \in \mathrm{extd}K^+$ に対して, $\{(k_{(\xi,j)}, w_{(\xi,j)}) \mid j \in J_\xi\} \subseteq Q \times X^*$を$\xi \circ G$ の generator とし, $S = \{x \in X \mid G(x) \leq_K 0\} \neq \emptyset$ とする. このとき次は同値である.

1. $\mathrm{coneco}\bigcup_{t\in T}\{(w_t, \delta) \in X^* \times \mathbb{R} \mid (k_t)^{-1}(0) \leq \delta\} + \{0\} \times [0, \infty)$ が汎弱閉, (CQ5)

2. $\forall f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ with $\begin{cases} \text{下半連続, 真, 凸,} \\ S \cap \mathrm{dom}f \neq \emptyset, \\ \mathrm{epi}f^* + \mathrm{epi}\delta_S^* \text{が汎弱閉,} \end{cases}$ に対して,

$$\inf_{x\in S} f(x) = \max_{\lambda\in\mathbb{R}_+^{(T)}} \left\{-f^*\left(-\sum_{t\in T}\lambda_t w_t\right) - \sum_{t\in T}\lambda_t(k_t)^{-1}(0)\right\},$$

ただし $T = \{(\xi, j) \mid \xi \in \mathrm{extd}K^+, j \in J_\xi\}$.

参考文献

[1] J. Benoist, J. M. Borwein, N.Popovici, *A characterization of quasiconvex vector-valued functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2003), pp. 1109–1113.

[2] M. A. Goberna, V. Jeyakumar and M. A. López, *Necessary and sufficient constraint qualifications for solvability of systems of infinite convex inequalities*, Nonlinear Anal. 68 (2008), pp. 1184–1194.

[3] V. Jeyakumar, *Constraint Qualifications Characterizing Lagrangian Duality in Convex Optimization*, J. Optim. Theory Appl. 136 (2008), pp. 31–41.

[4] D. T. Luc, *Theory of vector optimization*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[5] D. Luenberger, *Optimization by vector space methods*, Wiley New York, 1969.

[6] J. P. PENOT AND M. VOLLE, *On quasi-convex duality*, Math. Oper. Res. 15 (1990), pp. 597–625.

[7] S. SUZUKI AND D. KUROIWA, *On set containment characterization and constraint qualification for quasiconvex programming*, (submitted).

[8] 福島 雅夫, **非線形最適化の基礎**, 朝倉書店 2001.