数理解析研究所講究録
第1688巻 2010年 144-156

力学系の最小スペクトルと応用

愛媛大学・理工　平出 耕一 (Koichi Hiraide)
Department of Mathematics, Ehime University

このノートでは，特異点を持たない力学系に対し最小スペクトルの概念を導入し，その応用として正拡大的 C^r 写像の C^r 構造安定性に関する逆問題の解決などについて述べる.

§1 最小スペクトル

X をコンパクト距離空間とし，$f : X \to X$ を連続な全射とする．$\pi : E \to X$ は有限次元ベクトルバンドルで $\dim E \geq 1$ とし，$\|\cdot\|$ は Finsler 計量とする．$F : E \to E$ をバンドル写像とし，$f \circ \pi = \pi \circ F$ を満たすと仮定する．また，$F : E \to E$ は特異でないと仮定する．すなわち，各 $x \in X$ に対し，線型写像 $F : E_x \to E_{f(x)}$ は同型とする．ここで，E_x，$E_{f(x)}$ はファイバーを表す.

$$S(E) = \{v \in E \mid \|v\| = 1\}$$

とし，

$$\mu_m = \min\{\|F(v)\| \mid v \in S(E)\},$$
$$\mu_M = \max\{\|F(v)\| \mid v \in S(E)\}$$

とおく．このとき，

$$0 < \mu_m \leq \mu_m < \infty.$$

任意の $v \in E$ と $n \geq 0$ に対し

$$\mu_m^n \|v\| \leq \|F^n(v)\| \leq \mu_M^n \|v\|$$

が成り立つ．与えられた $K > 1$ に対し

$$e(F, K) = \{\lambda > 0 \mid \exists v \in S(E) \text{ s.t. } \|F^n(v)\| \leq K\lambda^n \ (\forall n \geq 0)\}$$

とおく．$\lambda \geq \mu_M$ ならば，$\lambda \in e(F, K)$ である．従って，$e(F, K) \neq \emptyset$.

$$\lambda_1(K) = \inf e(F, K) \geq \mu_m > 0$$

とおく.

Fact 1.1. $\lambda_1(K) \in e(F, K)$.

Proof. $\lambda_1(K)$ に収束する単調減少列 $\{\tau_j\}$ をとる．そのとき，$v_j \in S(E)$ が存在して

$$\|F^n(v_j)\| \leq K\tau_j^n \quad (\forall \geq 0).$$

$S(E)$ はコンパクトなので，v_j はある $v \in S(E)$ に収束するとしてよい．そのとき，$n \geq 0$ を固定して

$$\|F^n(v)\| \leq K\tau_j^n$$

を得る．よって

$$\|F^n(v)\| \leq K\lambda_1(K)^n.$$

故に，$\lambda_1(K) \in e(F, K)$.

Fact 1.2. $1 < K_1 < K_2$ に対し，$\lambda_1(K_1) = \lambda_1(K_2)$.

Proof. 定義より，$e(F, K_1) \subset e(F, K_2)$ を得る．従って，$\lambda_1(K_1) \geq \lambda_1(K_2)$.

逆の不等式を示す．$\lambda_1(K_2) \in e(F, K_2)$ だから，$v_2 \in S(E)$ が存在して $\|F^n(v_2)\| \leq K_2\lambda_1(K_2)^n$ $(\forall n \geq 0)$. 任意の $n \geq 1$ に対し $m \geq 1$ が存在して

$$\|F^m \circ F^n(v_2)\| > K_1\lambda_1(K_2)^m\|F^n(v_2)\|$$

が成り立つと仮定する．$K_1 > 1$ だから $K_1^\ell \mu_m > K_2\lambda_1(K_2)$ を満たす ℓ が取れる．従って，仮定より $m_1, \cdots, m_\ell \geq 1$ が存在して

$$\begin{aligned}\|F^{m_\ell+\cdots+m_1+1}(v_2)\| &> K_1^\ell\lambda(K_2)^{m_\ell+\cdots+m_1}\|F(v_2)\| \\ &> K_2\lambda(K_2)^{m_\ell+\cdots+m_1+1}\|v_2\|.\end{aligned}$$

これは矛盾．よって，ある $n \geq 1$ が在って，すべての $m \geq 1$ に対し

$$\|F^m(F^n(v_2))\| \leq K_1\lambda_1(K_2)^m\|F^n(v_2)\|.$$

従って，$\lambda_1(K_2) \in e(F, K_1)$. 故に，$\lambda_1(K_1) \leq \lambda_1(K_2)$.

Definition. $\lambda_1 = \lambda_1(K) > 0$ を F の最小スペクトル (**minimal spectrum**) と呼ぶ.

Definition. 距離空間の写像 $g : A \to A$ に対し，部分集合 $B \subset A$ が g の **return set** であるとは，すべての点 $x \in B$ に対し $n \geq 1$ が存在し $g^n(x) \in B$ が成り立つときをいう．ここで n を x の回帰時間という．B が g の *return set* であるとき，**return map** $r_B : B \to B$ が

$$r_B(x) = g^{n_x}(x)$$

によって定義される．ここで，$n_x \geq 1$ は第 1 回帰時間である．さらに B が有界 (**bounded**) であるとは，$\{n_x \mid x \in B\}$ が有界のとき，また B が非有界 (**unbounded**) であるとは，$\{n_x \mid x \in B\}$ が非有界のときをいう.

$b > 1$ を固定し

$$\Lambda_b = \{x \in X \mid \exists v \in E_x \setminus \{0\} \text{ s.t. } \|F^n(v)\| \leq b\lambda_1^n\|v\| \ (\forall n \geq 0)\}$$

とおく．Λ_b は X の空でない閉集合である.

Fact 1.3. Λ_b は f の *return set* である.

Proof. 点 $x \in \Lambda_b$ が存在して，すべての $n \geq 1$ に対し $f^n(x) \notin \Lambda_b$ であると仮定する．定義より，$v \in E_x \setminus \{0\}$ があって，$\|F^n(v)\| \leq b\lambda_1^n\|v\|$ $(\forall n \geq 0)$. $f(x) \notin \Lambda_b$ だから，$n_1 \geq 1$ があって $\|F^{n_1}(F(v))\| > b\lambda_1^{n_1}\|F(v)\|$. $f^{n_1+1}(x) \notin \Lambda_b$ だから，$n_2 \geq 1$ があって

$$\begin{aligned}\|F^{n_2}(F^{n_1+1}(v))\| &> b\lambda_1^{n_2}\|F^{n_1+1}(v)\| \\ &> b^2\lambda_1^{n_2+n_1}\|F(v)\|.\end{aligned}$$

この議論を繰り返して，任意の $\ell \geq 1$ に対し $n_1, n_2, \cdots, n_\ell \geq 1$ をとることができて

$$\begin{aligned}\|F^{n_\ell+\cdots+n_1+1}(v)\| &> b^\ell\lambda_1^{n_\ell+\cdots+n_1}\|F(v)\| \\ &\geq b^\ell\mu_m\lambda_1^{n_\ell+\cdots+n_1}\|v\|\end{aligned}$$

$b > 1$ より，$b^\ell\mu_m > b\lambda_1$ となる ℓ が存在するから，これは矛盾である．よって，Fact 3 が成り立つ.

§2 Minimal return sets

Definition. 距離空間の写像 $g : A \to A$ の *return set* B は空でない閉集合とする．B が **minimal** であるとは，$C \subset B$ が空でない閉集合で $r_B(C) \subset C$ であるとき $B = C$ でなければならないときをいう．

Fact 2.1. *return set* B はコンパクトとすると，次が成り立つ．
(1) $r_B : B \to B$ に対し *minimal return set* $B' \subset B$ が存在する．
(2) B が *minimal* ならば，$\overline{r_B(B)} = B$ である．ここで $\overline{\cdot}$ は閉包である．

Proof. (1): $\mathcal{O}$ を

$$\mathcal{O} = \{B_\lambda \mid B_\lambda \subset B,\ B_\lambda \neq \emptyset,\ B_\lambda \text{ is closed},\ r_B(B_\lambda) \subset B_\lambda\}$$

で定めると，$B \in \mathcal{O} \neq \emptyset$. また，

$$r_B(\cap_\lambda B_\lambda) \subset \cap_\lambda B_\lambda$$

なので，$\mathcal{O}$ は包含関係に関し帰納的．よって Zorn の補題より結論を得る．
(2): 定義より明らか．

Fact 2.2. B が *minimal return set* で有界とすると，$n_0 > 0$ が存在して $\cup_{n=0}^{n_0} g^n(B)$ は g の（通常の意味の）*minimal* な不変集合である．

Proof. Fact 2.1 (2) より従う．

minimal return set が非有界の場合を扱うために，コンパクト距離空間の連続な全射 $f : X \to X$ は正拡大的かつ開写像と仮定する．このとき，次が成り立つ．

Fact 2.3. 上の仮定もとで，B が f の *minimal return set* とし非有界とすると，$n > 0$ が存在し $r_B^n(x)$ の $r_B : B \to B$ による後方軌道の全体は B で稠密である．

§3 有界な場合

$\lambda_1 > 0$ を $F : E \to E$ の最小スペクトルとし，$b > 1$ を固定する．Λ_b を§1 のものとし，$\Lambda \subset \Lambda_b$ を minimal return set とする．この節では Λ は有界と仮定する．このとき，$b > 1$ を十分大とすると，Λ は f-不変としてよい．各点 $x \in \Lambda$ に対し

$$E_x(0) = \{v \in E_x \mid \exists C_v > 1 \text{ s.t.} \|F^n(v)\| \leq C_v \lambda_1^n \|v\| \ (\forall n \geq 0)\}$$

とおく．

Lemma 3.1. すべての $x \in \Lambda$ に対し，$E_x(0)$ は E_x の部分空間である．

Proof. 定義により，$v \in E_x(0), k \in \mathbb{R}$ ならば $kv \in E_x(0)$ であることは明らか．$v, w \in E_x(0)$ とすると $C_v > 1, C_w > 1$ が存在して，すべての $n \geq 0$ に対し

$$\|F^n(v)\| \leq C_v \lambda_1^n \|v\|, \quad \|F^n(w)\| \leq C_w \lambda_1^n \|w\|.$$

よって，$v+w\neq 0$ ならば，任意の $n\geq 0$ に対し

$$\begin{aligned}\|F^n(v+w)\| &\leq \|F^n(v)\|+\|F^n(w)\|\\ &\leq C_v\lambda_1^n\|v\|+C_w\lambda_1^n\|w\|\\ &= \frac{C_v\|v\|+C_w\|w\|}{\|v+w\|}\lambda_1^n\|v+w\|.\end{aligned}$$

これは $v+w\in E_x(0)$ を意味する．故に結論が得られる．

$$\hat{\Lambda}=\{v\in E_\Lambda \mid \|F^n(v)\|\leq b\lambda_1^n\ (\forall n\geq 0)\}$$

とおく．$\hat{\Lambda}$ が閉集合であることを示すのは容易である．

$$P=\pi_{|\hat{\Lambda}}:\hat{\Lambda}\to\Lambda$$

とおく．

Lemma 3.2. 任意の $x\in\Lambda$ に対し

$$E_x(0)=\{kv \mid v\in P^{-1}(x),\ k\in\mathbb{R}\}$$

が成り立つ．

Proof. $w\in E_x(0)$, $w\neq 0$ とすると，$C_w>1$ が存在し

$$\|F^n(w)\|\leq C_w\lambda_1^n\|w\|\ (\forall n\geq 0)$$

が成り立つ．

$$v=\frac{b}{C_w\|w\|}w$$

とすると，$\|F^n(v)\|\leq b\lambda_1^n\ (\forall n\geq 0)$．よって $v\in P^{-1}(x)$．従って

$$w=\frac{C_w\|w\|}{b}v\in\{kv \mid v\in P^{-1}(x),\ k\in\mathbb{R}\}.$$

逆に，$w=kv$, $v\in P^{-1}(x)\setminus\{0\}$, $k\in\mathbb{R}$ とすると，$\|F^n(v)\|\leq b\lambda_1^n\ (\forall n\geq 0)$ だから

$$\begin{aligned}\|F^n(w)\| &\leq |k|b\lambda_1^n\\ &= \frac{b}{\|v\|}\lambda_1^n\|w\|.\end{aligned}$$

がすべての $n\geq 0$ に対して成り立つ．よって，$w\in E_x(0)$.

$1\leq d\leq \dim E$ に対し

$$\Lambda(d)=\{x\in\Lambda \mid \dim E_x(0)=d\}$$

とおく．$f:\Lambda\to\Lambda$ は minimal で $F:E\to E$ は特異でないので，$\Lambda(d)$ は空集合か Λ の稠密な部分集合である．従って，$1\leq d_1<\cdots<d_\ell\leq\dim E$ が存在して

$$\Lambda=\bigcup_{i=1}^{\ell}\Lambda(d_i)$$

は稠密な部分集合による互いに交わりのない和集合である．

Lemma 3.3. 定数 $C > 1$ が存在して，任意の $x \in \Lambda(d_1)$ に対し

$$E_x(0) = \{v \in E_x \mid \|F^n(v)\| \le C\lambda_1^n \|v\| \ (\forall n \ge 0)\} \tag{3.1}$$

が成り立つ.

Proof. $x \in \Lambda$ とし，$\{v_1, \cdots, v_d\}$ を $E_x(0)$ の基底で $\|v_i\| = 1$ $(1 \le i \le d)$ を満たすものとする．このとき，$v \in E_x(0)$, $\|v\| = 1$ に対し $\alpha_1, \cdots, \alpha_d \in \mathbb{R}$ が存在し $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_d v_d$ が成り立ち，$|\alpha_i| \le \alpha_x$ $(1 \le i \le d)$ を満たす $\alpha_x > 0$ を取ることができる．よって，$C_1, \cdots, C_d > 0$ が存在して，任意の $n \ge 0$ に対し

$$\begin{aligned}\|F^n(v)\| &\le |\alpha_1| C_1 \lambda_1^n + \cdots + |\alpha_d| C_d \lambda_1^n \\ &\le \alpha_x (C_1 + \cdots + C_d) \lambda_1^n.\end{aligned}$$

$C_x = \alpha_x(C_1 + \cdots + C_d)$ と置いて，すべての $v \in E_x(0)$, $\|v\| = 1$ に対し $\|F^n(v)\| \le C_x \lambda_1^n$ $(\forall n \ge 0)$ を得る．従って，$\varepsilon_x v \in P^{-1}(x)$．ここで $\varepsilon_x = b/C_x$.

$\varepsilon > 0$ に対し

$$S_\varepsilon(\Lambda) = \{v \in E_\Lambda \mid \|v\| = \varepsilon\}$$

とおく．上の結果と Lemma 3.2 より

$$E_x(0) \cap S_{\varepsilon_x}(\Lambda) = P^{-1}(x) \cap S_{\varepsilon_x}(\Lambda).$$

従って，$\varepsilon > 0$ に対し

$$\Lambda^\varepsilon = \{x \in \Lambda \mid E_x(0) \cap S_\varepsilon(\Lambda) = P^{-1}(x) \cap S_\varepsilon(\Lambda)\}$$

とおくと，$x \in \Lambda^{\varepsilon_x}$．よって

$$\Lambda = \bigcup_{\varepsilon > 0} \Lambda^\varepsilon = \bigcup_{\varepsilon > 0} \overline{\Lambda^\varepsilon}.$$

従って，$\varepsilon_0 > 0$ が存在し $\mathrm{int}\overline{\Lambda^{\varepsilon_0}} \neq \emptyset$.

$$\Lambda^{\varepsilon_0} = (\Lambda^{\varepsilon_0} \cap \Lambda(d_1)) \cup \cdots \cup (\Lambda^{\varepsilon_0} \cap \Lambda(d_\ell))$$

であるから，ある i に対し $\mathrm{int}\overline{\Lambda^{\varepsilon_0} \cap \Lambda(d_i)} \neq \emptyset$. $x \in \Lambda^{\varepsilon_0} \cap \Lambda(d_i)$ ならば，すべての $v \in E_x(0)$ に対し $\varepsilon_0 \frac{v}{\|v\|} \in P^{-1}(x)$．従って，$\|F^n(v)\| \le \frac{b}{\varepsilon_0} \lambda_1^n \|v\|$ $(\forall n \ge 0)$．よって

$$E_x(0) = \{v \in E_x \mid \|F^n(v)\| \le \frac{b}{\varepsilon_0} \lambda_1^n \|v\| \ (\forall n \ge 0)\}. \tag{3.2}$$

従って，$\Lambda^{\varepsilon_0} \cap \Lambda(d_i)$ の点列 $\{x_i\}$ が点 $x \in \Lambda$ に収束し，部分空間の列 $\{E_{x_i}(0)\}$ が部分空間 E'_x に収束するならば，$E'_x \subset E_x(0)$ を得る．これは，$\dim E_x(0) \ge d_i$ を意味する．$\mathrm{int}\overline{\Lambda^{\varepsilon_0} \cap \Lambda(d_i)} \neq \emptyset$ であり $\Lambda(d_1)$ は Λ で稠密であるから，

$$d_i = d_1$$

でなければならない．故に，$\mathrm{int}\overline{\Lambda^{\varepsilon_0} \cap \Lambda(d_1)} \neq \emptyset$ である．

$x \in \Lambda(d_1)$ とする．$f : \Lambda \to \Lambda$ は minimal だから，$N > 0$ と $0 \leq n \leq N$ が存在して，$f^n(x) \in \mathrm{int}\overline{\Lambda^{\varepsilon_0} \cap \Lambda(d_1)}$．$v \in E_x(0)$ とすると $F^n(v) \in E_{f^n(x)}(0)$．よって，任意の $k \geq 0$ に対し

$$\begin{aligned}\|F^k \circ F^n(v)\| &\leq \frac{b}{\varepsilon_0}\lambda_1^k \|F^n(v)\| \\ &\leq C\lambda_1^{k+n}\|v\|\end{aligned}$$

ここで $C > 1$ は N に依存する定数である．故に，任意の $x \in \Lambda(d_1)$ に対し (3.1) が成り立つ．

Lemma 3.3 より

$$\bigcup_{x \in \Lambda(d_1)} E_x(0)$$

は $\Lambda(d_1)$ 上で連続であることに注意する．

Lemma 3.4. 定数 $C > 1$ が存在して，すべての $x \in \Lambda(d_1)$ と $v \in E_x(0)$ に対し

$$C^{-1}\|v\| \leq \frac{\|F^n(v)\|}{\lambda_1^n} \leq C\|v\| \quad (\forall n \geq 0). \tag{3.3}$$

Proof. (3.3) の上からの評価は Lemma 3.3 から従う．よって下からの評価を示せば十分である．

$$G(d_1) = \overline{\bigcup_{x \in \Lambda(d_1)} E_x(0)}$$

とおく． 次の性質を満たす $\Lambda(d_1)$ の点列 $\{x_i\}$ 全体の集合を $\mathcal{S}$ で表す：x_i は Λ の点 x に収束し，部分空間の列 $E_{x_i}(0)$ は E_x の部分空間（$E_{\{x_i\}}$ で表す）に収束する．このとき，

$$G(d_1) = \bigcup_{\{x_i\} \in \mathcal{S}} E_{\{x_i\}}$$

が成り立ち，Lemma 3.3 より，すべての $E_{\{x_i\}}$ と $v \in E_{\{x_i\}}$ に対し

$$\|F^n(v)\| \leq C\lambda_1^n\|v\| \quad (\forall n \geq 0)$$

となる．

$\{x_i\} \in \mathcal{S}$ に対し

$$\Gamma_{\{x_i\}} = \{v \in E_{\{x_i\}} \mid \inf\{\frac{\|F^n(v)\|}{\lambda_1^n}\} = 0\}$$

とおく．$v \in \Gamma_{\{x_i\}}$ とすると，$\varepsilon > 0$ に対し $n \geq 0$ が存在し $\|w\| < \varepsilon$．ここで $w = 1/\lambda_1^n F^n(v)$．$\|F^m(w)\| \leq C\lambda_1^m\|w\|$ $(m \geq 0)$ だから

$$\frac{1}{\lambda_1^{n+m}}\|F^m(w)\| \leq \frac{C}{\lambda_1^n}\|F^n(v)\| < C\varepsilon.$$

よって，

$$\frac{\|F^n(v)\|}{\lambda_1^n} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

特に，$\Gamma_{\{x_i\}}$ は $E_{\{x_i\}}$ の部分空間である．

$0 < a \leq 1$ に対し

$$\Gamma_{\{x_i\}}(a) = \{v \in E_{\{x_i\}} \setminus \{0\} \mid \inf\{\frac{\|F^n(v)\|}{\lambda_1^n}\} \geq a\|v\|\}$$

とおく．任意の $\{x_i\} \in \mathcal{S}$ に対し $\Gamma_{\{x_i\}}(1) = \emptyset$ と仮定すると，任意の $\{x_i\} \in \mathcal{S}$ と $v \in E_{\{x_i\}} \setminus \{0\}$ に対し $n \geq 1$ が存在して

$$\frac{\|F^n(v)\|}{\lambda_1^n} < \|v\|$$

となる．このとき，$G(d_1) \cap S_1(\Lambda)$ のコンパクト性を使って，λ_1 の取り方に矛盾を導くことができる．よって $\{y_i\} \in \mathcal{S}$ が存在し $\Gamma_{\{y_i\}}(1) \neq \emptyset$．このことから，任意の $\{x_i\} \in \mathcal{S}$ に対し $\Gamma_{\{x_i\}}(C^{-1}) \neq \emptyset$ が得られる．実際，$f : \Lambda \to \Lambda$ は minimal なので，数列 $\{n_i\}$ が存在して $F^{n_i}(E_{\{y_i\}}) \to E_{\{x_i\}}$ $(i \to \infty)$．$v \in \Gamma_{\{y_i\}}(1)$ とすると，

$$\frac{F^{n_i}(v)}{\lambda_1^n} \to w \in E_{\{x_i\}} \quad (i \to \infty)$$

としてよい．このとき，

$$\inf \frac{\|F^n(w)\|}{\lambda_1^n} \geq C^{-1}\|w\|$$

となる．

$$C_1 = C < C_2 < \cdots < C_k < \cdots \to \infty$$

となる数列を取る．$v \in E_{\{x_i\}} \setminus \Gamma_{\{x_i\}}(C_k^{-1})$ とすると，

$$\inf \frac{\|F^n(v)\|}{\lambda_1^n} < C_k^{-1}\|v\|$$

が成り立つ．$\varepsilon > 0$ を十分小とし $\|w\| < \varepsilon$ とすると

$$\frac{\|F^n(w)\|}{\lambda_1^n} \leq C\|w\| < C\varepsilon$$

だから

$$\inf \frac{\|F^n(v+w)\|}{\lambda_1^n} < C_k^{-1}\|v\| + C\varepsilon,$$

よって，$v + w \in E_{\{x_i\}} \setminus \Gamma_{\{x_i\}}(C_k^{-1})$．これは，$\Gamma_{\{x_i\}}(C_k^{-1})$ は $E_{\{x_i\}}$ の閉集合であることを意味する．従って，$\{\Gamma_{\{x_i\}}(C_k^{-1}) \mid \{x_i\} \in \mathcal{S}\}$ は上半連続であることが得られる．

ある k に対し

$$\Gamma = \{ \bigcup_{\{x_i\}\in\mathcal{S}} \Gamma_{\{x_i\}}(C_k^{-1})\} \cap \overline{\bigcup_{\{x_i\}\in\mathcal{S}} \Gamma_{\{x_i\}}} \neq \emptyset$$

を仮定すると，$\pi(\Gamma) = \Lambda$ となる．$\{\Gamma_{\{x_i\}}(C_k^{-1}) \mid \{x_i\} \in \mathcal{S}\}$ が上半連続であることから，十分小さい $\varepsilon > 0$ に対し，開集合 $U \subset \{\Gamma_{\{x_i\}}(C_k^{-1}) \mid \{x_i\} \in \mathcal{S}\}$ が存在して，U は ε–連続である．このとき，$\cup\{\Gamma_{\{x_i\}}(C_{k+1}^{-1}) \mid \{x_i\} \in \mathcal{S}, \pi(x) \in \pi(U)\}$ は $\cup U$ の近傍となる．従って，$\Gamma_{\{x_i\}}(C_{k+1}^{-1}) \cap \Gamma_{\{x_i\}} \neq \emptyset$．これは矛盾である．故に，$\Gamma = \emptyset$．従って，すべての $\{x_i\} \in \mathcal{S}$ に対し $\Gamma_{\{x_i\}} = \emptyset$．よって，ある k が存在し

$$E_{\{x_i\}} = \Gamma_{\{x_i\}}(C_k^{-1})$$

がすべての $\{x_i\} \in \mathcal{S}$ に対して成り立つ．このことから (3.3) の下からの評価が得られる．

この後の議論を進めるために，$X = M$ を滑らかな閉リーマン多様体，$f : M \to M$ を正拡大的で正則な C^1 写像，$F = Df : TM \to TM$ を f の微分とする．このとき，次が得られる．

Proposition 3.5. 上の仮定のもとで，

$$\Lambda(d_1) = \Lambda$$

が成り立つ．

§4 非有界な場合

前節と同様，$\lambda_1 > 0$ を $F : E \to E$ の最小スペクトルとし，$b > 1$ を固定する．Λ_b を §1 のものとし，$\Lambda \subset \Lambda_b$ を minimal return set とする．この節では Λ は非有界と仮定する．return map

$$r = r_{\Lambda_b|\Lambda} : \Lambda \to \Lambda$$

に対し $\overline{r(\Lambda)} = \Lambda$ が成り立つ．以下で，$f : X \to X$ は正拡大的で開写像とする．$\tilde{F} : S(E) \to S(E)$ を

$$\tilde{F} = \frac{1}{\|F(v)\|} F(v)$$

で定義し，

$$\tilde{\Lambda}_b = \{v \in S(E) \mid \|F^n(v)\| \le b\lambda_1^n \ \ (\forall n \ge 0)\}$$

とおく．

Lemma 4.1. $\tilde{\Lambda}_b$ は $\tilde{F}$ の *return set* で $\pi(\tilde{\Lambda}_b) = \Lambda_b$ が成り立つ．

return map を

$$R_b : \tilde{\Lambda}_b \to \tilde{\Lambda}_b$$

で表し

$$\tilde{\Lambda} = \{v \in \tilde{\Lambda}_b \mid \pi(v) \in \Lambda\}$$

とおく．

$$R : \tilde{\Lambda} \to \tilde{\Lambda}$$

を $R = R_{b|\tilde{\Lambda}}$ で定義する．$x \in \Lambda$ に対し $E_x(0)$ を §2 と同様に定める．

Lemma 4.2. 任意の $x \in \Lambda$ に対し，$E_x(0)$ は E_x の部分空間である.

前節と同様に

$$\hat{\Lambda} = \{v \in E_\Lambda \mid \|F^n(v)\| \le b\lambda_1^n \quad (\forall n \ge 0)\}$$

とおいて

$$P = \pi_{|\hat{\Lambda}} : \hat{\Lambda} \to \Lambda$$

と定める.

Lemma 4.3. 任意の $x \in \Lambda$ に対し

$$E_x(0) = \{kv \mid v \in P^{-1}(x),\ k \in \mathbb{R}\}.$$

$1 \le d \le \dim E$ に対し

$$\Lambda(d) = \{x \in \Lambda \mid \dim E_x(0) = d\}$$

とおく. $\Lambda(d)$ は空集合であるか Λ の稠密な部分集合である (Fact 2.3). よって，$1 \le d_1 < \cdots < d_\ell \le \dim E$ が存在して

$$\Lambda = \bigcup_{i=1}^{\ell} \Lambda(d_i)$$

は稠密な部分集合による互いに交わりのない和集合である.

Lemma 4.4. 定数 $C > 1$ と $x_0 \in \Lambda$, $\delta > 0$ が存在して，任意の $x \in \Lambda(d_1) \cap B_\delta(x_0)$ に対し

$$E_x(0) = \{v \in E_x \mid \|F^n(v)\| \le C\lambda_1^n\|v\| \quad (\forall n \ge 0)\}$$

ここで $B_\delta(x_0)$ は中心 x_0，半径 δ の球体を表す.

Lemma 4.4 より

$$\bigcup_{x \in \Lambda(d_1)} E_x(0)$$

は $\Lambda(d_1)$ 上で連続であることが得られる.

Lemma 4.5. 定数 $C > 1$ が存在して，任意の $v \in \tilde{\Lambda}$ と $n \ge 0$ に対し

$$C^{-1}\|v\| \le \frac{\|F^{N_v + \cdots + N_{R^{n-1}(v)}}(v)\|}{\lambda_1^{N_v + \cdots + N_{R^{n-1}(v)}}}$$

ここで $N.$ は第 1 回帰時間である.

§3 と同様，この後の議論を進めるために，$X = M$ を滑らかな閉リーマン多様体，$f : M \to M$ を正拡大的で正則な C^1 写像，$F = Df : TM \to TM$ を f の微分とする. このとき，次が得られる.

Proposition 4.6. 上の仮定のもとで,

$$\Lambda(d_1) = \Lambda$$

が成り立つ.

§5 Second stage

$M = X$ を滑らか閉リーマン多様体とし，$f : M \to M$ を正拡大的で正則な C^1 写像とする．$\lambda_1 > 0$ を微分 $Df : TM \to TM$ の最小スペクトルとし，$b > 1$ を固定する．$\Lambda_b(0) = \Lambda_b$ を前のものとし，$\Lambda(0) = \Lambda$ を minimal return set とする．§3 と §4 の結果から，$T_\Lambda M$ の連続な部分バンドル

$$E_\Lambda(0) = \bigcup_{x \in \Lambda} E_x(0)$$

が得られる.

線形空間 V と部分空間 E が与えられてとき，商空間 V/E の元を $[v]$ $(v \in V)$ で表し，$\| \ \|$ が V のノルムのとき，V/E のノルム $\| \ \|$ を $\|[v]\| = \inf\{\|w\| \mid w \in [v]\}$ により定める.

$$\Lambda_b(1) = \{x \in \Lambda(0) \mid \exists [v] \in T_xM/E_x(0) \setminus \{[0]\} \text{ s.t. } \|[Df^n(v)]\| \leq b\lambda_1^n \|[v]\| \ (\forall n \geq 0)\}$$

とおく．$\Lambda_b(1)$ は閉集合である.

$\Lambda_b(1) \neq \emptyset$ と仮定する.

Lemma 5.1. $\Lambda_b(1)$ は f の *return set* である.

$\Lambda(1) \subset \Lambda_b(1)$ を minimal return set とし，$x \in \Lambda(1)$ に対し

$$\begin{aligned} E_x(1) &= \{v \in T_xM \mid \exists C_v > 1 \text{ s.t.} \|[Df^n(v)]\| \leq C_v \lambda_1^n \|[v]\| \ (\forall n \geq 0)\} \\ &\supset E_x(0) \end{aligned}$$

とおく.

Lemma 5.2. 任意の $x \in \Lambda(1)$ に対し，$E_x(1)$ は T_xM の部分空間である.

商ベクトルバンドル $T_{\Lambda(1)}M/E_{\Lambda(1)}(0)$ の部分集合

$$\hat{\Lambda}(1) = \{[v] \in T_{\Lambda(1)}M/E_{\Lambda(1)}(0) \mid \|[Df^n(v)]\| \leq b\lambda_1^n \ \ (\forall n \geq 0)\}$$

を定義し

$$P_1 = \pi_{|\hat{\Lambda}(1)} : \hat{\Lambda}(1) \to \Lambda(1)$$

とおく.

Lemma 5.3. 任意の $x \in \Lambda(1)$ に対し

$$E_x(1) = \{kv \mid [v] \in P_1^{-1}(x),\ k \in \mathbb{R}\}.$$

$1 \leq d \leq \dim E$ に対し

$$\Lambda(d;1) = \{x \in \Lambda(1) \mid \dim E_x(1) = d\}$$

とおく．$\Lambda(d;1)$ は空集合であるか $\Lambda(1)$ で稠密である．よって $1 \leq d_1^1 < d_2^1 < \cdots < d_{\ell_1}^1 \leq \dim E$ が在って

$$\Lambda(1) = \bigcup_{i=1}^{\ell_1} \Lambda(d_i^1;1)$$

は稠密な部分集合による互いに交わりのない和集合である．

Lemma 5.4. 定数 $C > 1$ と $x_0 \in \Lambda(1), \delta > 0$ が存在して，任意の $x \in \Lambda(d_1^1;1) \cap B_\delta(x_0)$ に対し

$$E_x(1) = \{v \in T_x M \mid \|[Df^n(v)]\| \leq C\lambda_1^n \|[v]\|\ (\forall n \geq 0)\}.$$

よって

$$\bigcup_{x \in \Lambda(d_1^1;1)} E_x(1)$$

は $\Lambda(d_1^1;1)$ 上で連続になる．

Lemma 5.5. 定数 $C > 1$ が存在して，任意の $v \in \tilde{\Lambda}(1)$ と $n \geq 0$ に対し

$$C^{-1}(N_v + \cdots + N_{R^{n-1}(v)})^{-1}\|v\| \leq \frac{\|Df^{N_v + \cdots + N_{R^{n-1}(v)}}(v)\|}{\lambda_1^{N_v + \cdots + N_{R^{n-1}(v)}}}$$

ここで $N.$ は第 1 回帰時間である．

Proposition 5.6. $\Lambda(d_1^1;1) = \Lambda(1)$ が成り立つ．

§6 Filtration

§5 の議論を繰り返し行って minimal return set の狭義単調減少有限列

$$\Lambda(0) \supset \Lambda(1) \supset \cdots \supset \Lambda(i_0) \supset \Lambda(i_0+1) = \emptyset$$

と return map の微分で不変な $T_{\Lambda(i_0)}M$ の連続部分バンドルの狭義単調増加有限列

$$E_{\Lambda(i_0)}(0) \subset E_{\Lambda(i_0)}(1) \subset \cdots \subset E_{\Lambda(i_0)}(i_0) = E_{\Lambda(i_0)}(i_0+1)$$

を得る．商バンドル $E_i = E_{\Lambda(i_0)}(i)/E_{\Lambda(i_0)}(i-1)$ に対し $S(E_i) = \{[v] \in E_i \mid \|[v]\| = 1\}$ とおいて

$$\tilde{\Lambda}(i) = \{[v] \in S(E_i) \mid \|[Df^n(v)]\| \leq b\lambda_1^n \|[v]\|\ (\forall n \geq 0)\}$$

と定める．このとき，Df から自然に return map

$$R_i : \tilde{\Lambda}(i) \to \tilde{\Lambda}(i)$$

が導かれる．

Theorem 6.1. 定数 $C>1$ が存在して次が成り立つ；

(1) ある $x_0\in\Lambda(i_0)$ と $\delta>0$ があって，任意の $x\in\Lambda(i_0)\cap B_\delta(x_0)$ と $v\in E_{\Lambda(i_0)}(i)$ $(\pi(v)=x)$ に対し

$$\frac{\|Df^n(v)\|}{\lambda_1^n}\le Cn^i\|v\|\ \ (\forall n\ge 0),$$

(2) 任意の $v\in\tilde{\Lambda}(i)$ に対し

$$C^{-1}(N_v+\cdots+N_{R_i^{n-1}(v)})^{-i}\|v\|\le\frac{\|Df^{N_v+\cdots+N_{R_i^{n-1}(v)}}(v)\|}{\lambda_1^{N_v+\cdots+N_{R_i^{n-1}(v)}}}\ \ (\forall n\ge 0).$$

§7 Normal subbundle

次が成り立つ.

Theorem 7.1. 定数 $C>1$ と $\lambda_2>\lambda_1$ が存在して，任意の $\mathbf{x}=(x_i)\in\lim_{\leftarrow}(r_{\Lambda(i_0)},\Lambda(i_0))$ に対し $T_{x_0}M$ の $Dr_{\Lambda(i_0)}$ 不変な部分空間 $F(\mathbf{x})$ が存在して

(1) $E_{x_0}\oplus F(\mathbf{x})=T_{x_0}M$,

(2) 任意の $v\in F(\mathbf{x})$ に対し

$$\|Dr^n_{\Lambda(i_0)}(v)\|\ge C\lambda_2^{N_v+\cdots+N_{Dr^{n-1}_{\Lambda(i_0)}(v)}}\|v\|,$$

(3) $\mathbf{x}\mapsto F(\mathbf{x})$ は連続.

§8 応用

M を滑らか閉リーマン多様体とする.，$1\le r\le\infty$ に対し，$C^r(M)$ は M の C^r 写像全体の集合とし，C^r 位相を持つとする.

$$PE^r(M)=\{f\in C^r(M)\mid f\ \text{は正拡大的}\ \}$$

とおき，$PE^r(M)^\circ$ は $C^r(M)$ の中での C^r 位相に関する $PE^r(M)$ の内部を表すとし，

$$\partial PE^r(M)=PE^r(M)\setminus PE^r(M)^\circ$$

とおく．このとき，次の定理を示すことができる.

Theorem 8.1. $f:M\to M$ は C^r 写像で $1\le r\le\infty$ とすると，

$$f\in PE^r(M)^\circ\Longleftrightarrow f:M\to M\ \text{は拡大写像}$$

が成り立つ.

Theorem 8.2. $f: M \to M$ は C^r 写像で $1 \leq r \leq \infty$ とし，f は正拡大的であると仮定する．このとき，$f \in \partial PE^r(M)$ であるための必要十分条件は，f は特異点を持つか，あるいは f は正則で次の *(1)*，*(2)*，*(3)* のいずれかが成り立つ；

(1) 周期点 p が存在し $D_p f^n : T_p M \to T_p M$ は絶対値 1 の固有値を持つ．ここで n は p の周期である．

(2) f の *minimal set* Λ (周期軌道でない) と Df-不変な連続部分バンドル $E \subset T_\Lambda M$, $\dim E \geq 1$ と定数 $C > 1$ が存在し，すべての $v \in E$ と $n \geq 0$ に対し

$$C^{-1}\|v\| \leq \|Df^n(v)\| \leq C\|v\|$$

である．

(3) f の非有界な *minimal return set* Λ と Dr_Λ-不変な連続部分バンドル $E \subset T_\Lambda M$, $\dim E \geq 1$ と定数 $C > 1$ が存在し，すべての $v \in E$ と $n \geq 0$ に対し

$$\|Df^n(v)\| \leq C\|v\|, \quad C^{-1}\|v\| \leq \|Dr_\Lambda^n(v)\|$$

である．

References

[1] C.Bonatti, L.Díaz and F.Vuillemin, Cubic tangencies and hyperbolic diffeomorphisms, Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) 29 (1998), 99–144.

[2] E.Coven and W.Reddy, Positively expansive maps of compact manifolds, Lecture Notes in Math. 819, Springer–Verlag, 1980, 96–110.

[3] H.Enrich, A heteroclinic bifurcation of Anosov diffeomorphisms, Ergod. Th. and Dynam. Sys. 18 (1998), 567–608.

[4] M.Gromov, Groups of polynomial growth and expanding maps, I.H.E.S. Publ. Math. 53 (1981), 53–78.

[5] K.Hiraide, Positively expansive maps and growth of fundamental groups, Proc. Amer. Math. Soc. 104 (1988), 934–941.

[6] K.Hiraide, Positively expansive open maps of Peano spaces, Topology and its Appl. 37 (1990), 213–220.

[7] K.Hiraide, Nonexistence of positively expansive maps on compact connected manifolds with boundary, Proc. Amer. Math. Soc. 110 (1990), 565–568.

[8] M.Hirsch, C.Pugh and M.Shub, Invariant manifolds, Lecture notes in Math. 583, Springer-Verlag, 1977.

[9] R.Mañé, Expansive diffeomorphisms, Dynam. Sys. Warwick, Lecture notes in Math. 468, Springer-Verlag, 1974, 162-174.

[10] R.Mañé, Hyperbolicity, sinks and measure in one-dimensional dynamics, Comm. Math. Phys. 100 (1985), 495–524.

[11] W.Reddy, Expanding maps on compact metric spaces, Topology and its Appl. 13 (1982), 327–334.

[12] M.Shub, Endomorphisms of compact differentiable manifolds, Amer. J. Math. 91 (1969), 175–199.