数理解析研究所講究録
第1688巻2010年77-88

複雑ネットワーク上の結合振動子系のダイナミクス

京都大学大学院理学研究科・物理学教室　中尾 裕也 (Hiroya Nakao)
Department of Physics, Kyoto University

2009年12月8日

概要

複雑ネットワークを介して相互作用するリミットサイクル振動子系のダイナミクスについて解説する．一般に，リミットサイクル振動子系の記述を簡略化する方法として，位相縮約法と振幅縮約法があり，それぞれの方法により，位相方程式と振幅方程式が得られる．位相方程式は，相互作用等が十分弱く，振動子の状態を位相だけで表せる場合に有効である．一方，振幅方程式は，振動子が分岐点近傍にある場合に有効で，振幅の自由度を扱える．本稿では，これらの縮約法によって得られるランダムなスケールフリーネットワーク上の位相モデルと複素 Ginzburg-Landau(CGL) モデルに関する最近の研究を紹介する．まず，位相モデルにおける集団同期転移や定常な位相波の形成について紹介する．次に，CGL モデルの示すカオスやクラスタリング等の非一様ダイナミクスについて述べる．いずれの挙動も，ネットワークの平均場近似と，平均場に駆動される個々の振動子のダイナミクスを考えることにより，ある程度は理解できることを説明する．

1 導入

いわゆる複雑ネットワークという概念は，わずか10年前に提唱されて以来，その驚くべき普遍性により，当初の物理学・応用数学の枠をはるかに超えて，生命科学，神経科学，経済学や社会学まで，広範な分野に多大な影響を与えてきた [1–4]．ネットワークのノードの次数 (他のノードとの結合本数) がベキ分布に従うスケールフリー性が，細胞内酵素反応や脳の神経回路網，インターネットや航空路線網など，多様な系のネットワークに共通して成立することが膨大な研究によって明らかにされている．そのような複雑ネットワーク構造の機能的意義を理解するためには，ネットワークの静的構造のみならず，その上での動的過程を知る必要がある．特に，複雑ネットワークを介して相互作用する自律要素系の非線形ダイナミクスの解析が重要である．実際，脳の神経回路網，工場プラントや物流システム，センサーネットワーク等の通信システム，生体の細胞やバクテリアの集団，空間分断化された居住パッチ群に生息する生物種のメタ群集など，様々な事象がネットワーク上の結合力学系としてモデル化され得る．

ネットワーク結合力学系のプロトタイプとして，位相振動子 [5–10] の集団がネットワークを介して相互作用する位相モデルが盛んに研究されてきた [1, 3, 4, 9, 11, 12]．その代表例である蔵本モデル [5–9] は，振動子間の結合強度がある臨界値を超えると，個々の振動子の位相が相互に揃ってマクロな集団同期状態に転移することで有名だが，特にスケールフリーネットワーク上では，ベキ的な次数分布の効果により，結合強度が小さな極限でもマクロな同期が生じ得ることが指摘されている [11]．また，結合関数を若干変更すると，個々の振動子が次数に応じた位相差で互いに位相ロックする動的定常状態が生じ，ネットワーク上に見かけ上の位相波が形成される事も報告されている [12]．本稿では，これらの現象について，文献 [11, 12] に基づいて説明する．

さて，位相モデルは，一般のリミットサイクル振動子系から，相互作用が十分に弱く，各振動子の状態が常に結合のない時のリミットサイクル軌道の近くにあるという条件下で，振動子の位相自由度のみを残して振幅自由度を消去する位相縮約法 [6] によって導出されるものである．相互作用が強くなると，振幅自由度が無視できなくなるため，この近似は破綻する．この場合でも，振動子が超臨界 Hopf 分岐によりリミットサイクルを生じるならば，その分岐点近傍での複素振幅で振動子の状態を記述する複素 Ginzburg-Landau(CGL) モデルに縮約でき

る [6, 7, 13]．これは分岐点近傍でのみ有効な近似だが，振動子の振幅自由度を取り扱うことができて，位相モデルに比べ，より多彩なダイナミクスを生じ得る [6, 16, 18, 19]．本稿では，CGL モデルに基づいて，スケールフリーネットワーク上の結合振動子系は，一様振動状態の拡散誘起不安定化により，カオスやクラスタリングなどの非自明なダイナミクスを示し得ることを，文献 [16] に従って説明する．

2　ネットワーク

2.1　隣接行列と次数

N 個のノード ($j = 1, \cdots, N$) からなるネットワーク (グラフ) を考える [図 1(a)]．ネットワークは連結で，自分自身へのループはなく，エッジは無向で重みもないとする．このネットワークを $N \times N$ の隣接行列 A で指定する．その行列要素 $A_{j\ell}$ は，ノード j と ℓ がつながっていれば 1 を，つながっていなければ 0 をとり，ループは無いので $A_{jj} = 0$ で，無向グラフなので対称 $A_{j\ell} = A_{\ell j}$ である．ノード j の次数 (他のノードに結合するエッジの本数) は

$$k_j = \sum_{\ell=1}^{N} A_{j\ell}$$

で与えられ [1–4]．後の議論で重要な役割を果たす．今後，各ノードへの番号の与え方の任意性を利用して，ノードの次数が $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_N$ と大きい順に並ぶように，ノードに番号を振ることにする．このように決めたノード番号を用いて数値計算結果をプロットすることにより，複雑ネットワーク上に生じるパターンをうまく可視化できることが，後の議論で明らかとなる．

ランダムなネットワークを特徴づける上で，次数 k を持つノードの確率分布 $P(k)$ が重要な役割を果たす [図 1(b)] [1–4]．次数分布 $P(k)$ が Poisson 分布のように局在した形状の場合，ノード間の次数の不均一性は小さく，ネットワークには明確なスケール (特徴的次数) がある．一方，次数分布が $P(k) \sim k^{-\gamma}$ のようにベキ的な幅広い裾を持つ場合，特徴的な次数が存在しないという意味で，スケールフリーネットワークと呼ばれる [2]．もちろん現実のネットワークは有限であり，ベキ則などの性質は適当な上限と下限の間においてのみ近似的に成り立つ．自然界の

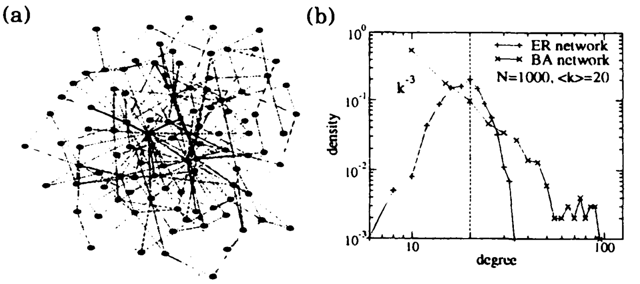

図 1　(a) Barabási-Albert のアルゴリズムで生成されたランダムスケールフリーネットワークの例．ネットワークサイズは $N = 100$, 平均次数は $\langle k \rangle = 4$．極端に多くのエッジを持つハブが存在する．(b) Erdös-Renyí単純ランダムネットワーク (ER) と Barabási-Albert スケールフリーネットワーク (BA) の次数分布の両対数プロット．いずれも $N = 1000$, $\langle k \rangle = 20$．ER ネットワークは平均次数の回りに次数分布が局在しているが，BA ネットワークはベキ的で特徴的な次数がない．

様々な系において，次数の不均一性の非常に大きなネットワークが多数見つかっているため，その機能的意義が盛んに議論されている [4]．

2.2　ネットワーク生成モデル

ランダムネットワークを生成する様々な数理モデルが提案されている．例えば，古典的な Erdös と Renyíによるモデルは，最初に与えたノードの集合に次数等を考慮せずに単にランダムにエッジを追加してゆくものであり，次数 k を持つノードの確率分布 $P(k)$ は Poisson 分布となる [図 1(b)] [2, 4]．サイズが大きくなると $P(k)$ は平均値 $\langle k \rangle = \sum_k P(k)k$ の近傍に鋭いピークを持ち，ほとんどのノードの次数が $\langle k \rangle$ に近い値を取る非常に均一なランダムネットワークとなる．

本稿では，良く知られた Barabási と Albert(複雑ネットワーク概念の提唱者) による preferential attachment アルゴリズムで生成される，次数の不均一性以外には構造のない，ランダムなスケールフリーネットワークを用いる [図 1(a)] [2]．これは，少数個のノード集合を初期条件に，徐々にノードを追加して新しいエッジをランダムに張ってゆくネットワーク成長モデルで，新たに追加したノードから新しいエッジを張る際に，より大きな次数を持つ既存のノードにより高い確率で結合させるところに特徴

がある．このため，大きな次数のノードがますます多数のエッジを獲得することとなり，次数不均一性の非常に強いランダムネットワークが得られる．実際，Barabási-Albert アルゴリズムによるネットワークの次数分布は $P(k) \sim k^{-3}$ とベキ的であることが知られている [図 1(b)].

スケールフリーネットワークの次数の平均と 2 次モーメントを計算しておく．次数の最小値を m, 最大値を M として，自然数である次数 k を連続近似すると，次数の規格化された確率密度は，

$$\tilde{P}(k) = \frac{1-\gamma}{M^{1-\gamma} - m^{1-\gamma}} k^{-\gamma}$$

となるため，平均次数は近似的に

$$\langle k \rangle \simeq \int_m^M dk \tilde{P}(k) k = \left(\frac{1-\gamma}{2-\gamma}\right) \frac{M^{2-\gamma} - m^{2-\gamma}}{M^{1-\gamma} - m^{1-\gamma}}$$

となる．大きなネットワークの極限で，最大次数を $M \to \infty$ としたときにも平均次数 $\langle k \rangle$ が有限であるためには，$\gamma > 2$ でなくてはならず，このとき $\langle k \rangle = m(1-\gamma)/(2-\gamma)$ となる．2 次モーメントについては，$\gamma > 3$ ならば $\langle k^2 \rangle = m^2(1-\gamma)(3-\gamma)$ と有限だが，$2 < \gamma \leq 3$ なら $\langle k^2 \rangle \to \infty$ と発散する．このことは，後でネットワーク蔵本モデルの集団同期転移を考える時に重要となる．実世界のネットワークは指数 γ が $2 < \gamma \leq 3$ の範囲にある場合が多いことが知られており，興味深い [4].

今後，特に断らない限り，数値計算においては Barabási-Albert の preferential attachment ルールで作成したサイズ $N = 1000$, 平均結合次数 $\langle k \rangle = 20$ のスケールフリーネットワーク上を用いる [2].

2.3 ネットワーク上の拡散と Laplacian 行列

ネットワーク上の拡散過程を考えよう．各ノード上に何らかの化学物質があり，これがエッジを通じてネットワーク上を拡散する．ノード j 上の化学物質の濃度を変数 X_j で表す $(j = 1, \cdots, N)$. 古典的な Fick の法則より，ノード k とノード j の濃度の差に比例してノード j に化学物質が流れ込むとすると [図 2(a)]，この拡散過程は，拡散定数を 1 として，

$$\dot{X}_j(t) = \sum_{\ell=1}^{N} A_{j\ell}(X_\ell - X_j) = \sum_{\ell=1}^{N} L_{j\ell} X_\ell$$

と表される．2 番目の表式で導入した

$$L_{j\ell} = A_{j\ell} - k_j \delta_{\ell j}$$

はネットワーク上の拡散を表す Laplacian 行列である．簡単な例として，一次元格子状のネットワークで，各ノードが両隣のノードのみと結合している場合，$A_{j\ell} = \delta_{j,\ell\pm1}$ なので拡散項は $\sum_{\ell=1}^{N} L_{j\ell} X_\ell = X_{j-1} - 2X_j + X_{j+1}$ となり，通常の連続場の Laplacian ∇^2 の差分形を与える．また，全てのノードが互いに結合した全結合ネットワークの場合，$A_{j\ell} = 1 - \delta_{j,\ell}$ となり，X_j の平均値を $\bar{X} = (1/N)\sum_{\ell=1}^{N} X_\ell$ とすれば，$\sum_{\ell=1}^{N} L_{j\ell} X_\ell = N(\bar{X} - X_j)$ と書ける．これは，各変数が系全体の平均との差に依存して変化する大域結合である．

Laplacian 行列の固有値と固有ベクトルを導入しておこう．固有方程式は，α $(= 1, \cdots, N)$ 番目の固有値を $\Lambda^{(\alpha)}$，対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{\phi}^{(\alpha)} = {}^t(\phi_1^{(\alpha)}, \cdots, \phi_N^{(\alpha)})$ として

$$\sum_{\ell=1}^{N} L_{j\ell} \phi_\ell^{(\alpha)} = \Lambda^{(\alpha)} \phi_j^{(\alpha)}$$

である．$L_{j\ell}$ は実対称行列なので，固有値は実数で，固有ベクトルは正規直交化できる．

$$\sum_{\ell=1}^{N} \phi_\ell^{(\alpha)} \phi_\ell^{(\beta)} = \delta_{\alpha,\beta}$$

定義より $\sum_{\ell=1}^{N} L_{j\ell} = 0$ なので，ネットワーク上の一様モード ${}^t(1, 1, \cdots, 1)/\sqrt{N}$ は固有値 0 に対応する固有ベクトルとなる．任意のベクトル u_j に対して $\sum_{j,\ell} u_j L_{j\ell} u_\ell = -\sum_{j,\ell} L_{j\ell}(u_j - u_\ell)^2/2 \leq 0$ が成立するので，$L_{j\ell}$ は非正定値であり，固有値 $\Lambda^{(\alpha)}$ は全て 0 以下の値をとる．最大固有値 0 の個数はネットワークの連結成分の数を与えるが [14]，今は連結したひとつのネットワークを考えているので，$\Lambda^{(0)} = 0$ のみである．以下，固有値が $0 = \Lambda^{(1)} > \Lambda^{(2)} \geq \Lambda^{(3)} \geq \cdots \geq \Lambda^{(N)}$ と並ぶように番号 α を振る．Laplacian 行列の固有値・固有ベクトルは，ネットワークの構造を特徴づける重要な量であり，データ解析や画像処理等，様々な用途に使われる [21].

3 ネットワーク結合振動子系とその縮約モデル

ネットワークの各ノード上にリミットサイクル振動子が置かれていて，それらがエッジを通じて相互作用する状況を考える．以下では，そのような状況を記述する方程式を直接扱うのではなく，結合が十

分に弱い時と，振動子が超臨界 Hopf 分岐点近傍にある時のふたつの場合において，位相モデルと CGL モデルに縮約して考察する．この手法は蔵本 [6] によって確立されたもので，元の方程式を近似することにより，逆に振動子の個別の詳細によらない系の一般的性質を議論することが可能となる．

3.1 ネットワーク位相モデル

自律リズムを示す細胞等がネットワークを通じて結合している状況の数理モデルを考えよう．

$$\dot{\boldsymbol{X}}_j(t) = \boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{X}_j) + \sum_{\ell=1}^{N} A_{j\ell}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{X}_j, \boldsymbol{X}_\ell) \qquad (1)$$

ここで，実ベクトル $\boldsymbol{X}_j$(d 次元とする) は j ($=1,\cdots,N$) 番目の振動子の状態，$\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{X}_j)$ はそのダイナミクス，右辺第 2 項がエッジで接続された振動子間に働く相互作用を表し，$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{X}_j, \boldsymbol{X}_\ell)$ は結合関数である．相互作用がない場合，各振動子は相空間に安定なリミットサイクル軌道をひとつ持ち，適当な初期点から出発した軌道はこの非摂動リミットサイクルに漸近するものとする．

振動子間の結合が十分に弱く，各振動子の状態が常に非摂動リミットサイクルの近傍にある場合，位相縮約法が適用できる．これは，d 次元の変数で表される振動子の状態 $\boldsymbol{X}(t)$ を，非摂動リミットサイクル軌道 $\boldsymbol{X}_0(t)$ とその近傍に定義した一定の振動数 ω で増加する位相 $\phi(t) \in [0, 2\pi)$ だけで近似的に記述する方法である．式 (1) において，結合は弱く，結合関数 $\boldsymbol{G}$ の各成分は $O(\epsilon)$ 程度だと仮定して (ϵ は小さなパラメータ)，$\boldsymbol{G} = \epsilon\boldsymbol{g}$ と書くことにする．また，振動子の性質も互いによく似ており，ずれの程度は $O(\epsilon)$ だとして，ダイナミクス $\boldsymbol{F}_j$ を共通部分 $\boldsymbol{F}$ とそこからの個別のずれ $\boldsymbol{f}_j$ に分離して $\boldsymbol{F}_j = \boldsymbol{F} + \epsilon\boldsymbol{f}_j$ と書く．すると，式 (1) より，ϵ の最低次の近似で以下の位相モデルを導出できる [6,7,10]．

$$\dot{\phi}_j(t) = \omega + \epsilon\left[\Delta_j + \sum_{\ell=1}^{N} A_{j\ell}\Gamma(\phi_j - \phi_\ell)\right]$$

ここで，ω は共通部分 $\boldsymbol{F}$ の表す力学系 $\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ のリミットサイクル軌道 $\boldsymbol{X}_0(t)$ の振動数，Δ_j は振動子 j の振動数の ω からのずれ，$\Gamma(\phi)$ は振動子間の相互作用を表す 2π 周期的な位相結合関数で，以下

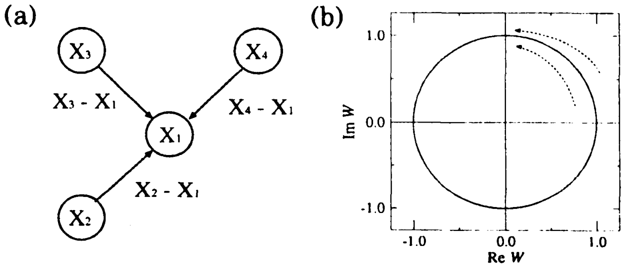

図 2 (a) ネットワーク上の拡散過程．化学物質等がノード間の濃度の差に比例して流れる．(b) 複素 Ginzburg-Landau モデルを構成する Stuart-Landau 振動子のリミットサイクル．複素平面上の原点が不安定化した固定点で単位円が安定なリミットサイクル軌道．

の式で与えられる [6,10]．

$$\Delta_j = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \boldsymbol{Z}(\psi)\cdot\boldsymbol{f}_j(\boldsymbol{X}_0(\psi))d\psi$$

$$\Gamma(\phi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \boldsymbol{Z}(\psi)\cdot\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X}_0(\psi), \boldsymbol{X}_0(\psi - \phi))d\psi$$

ここで $\boldsymbol{X}_0(\phi)$ は $\boldsymbol{F}$ の表すリミットサイクル軌道上の位相 ϕ の点を表し，$\boldsymbol{Z}(\phi)$ は位相感受関数と呼ばれる 2π 周期関数である．この $\boldsymbol{Z}(\phi)$ はリミットサイクル振動子の性質を特徴づける重要な関数で，数理モデルや実験系より決めることができる [5,6,10]．

位相結合関数 $\Gamma(\phi)$ を最低次の Fourier モード $-\Gamma_1\sin(\phi+\alpha)$ のみで近似した位相モデル

$$\dot{\phi}_j(t) = \omega_j - c\sum_{\ell=1}^{N} A_{j\ell}\sin(\phi_j - \phi_\ell + \alpha) \qquad (2)$$

は，蔵本モデルと呼ばれる (パラメータ α は $[-\pi, \pi]$ にとる) [6,8]．ここで個々の振動子の振動数を $\omega_j = \omega + \epsilon\Delta_j$，結合強度を $c = \epsilon\Gamma_1$ と書いた．結合項の前の符号を負にとったのは，蔵本の元の記法 [6] に合わせたためで，$c > 0$, $|\alpha| < \pi/2$ の時に相互作用は引力的で，振動子間の位相差を縮める方向に作用する．このモデルは，もともと大域結合の場合に導入されたもので，結合強度 c を 0 から増加させると，振動数 ω_j のばらつきにも関わらず，ある c の値で集団同期転移を起こし，マクロな集団振動を示すことが知られている [6,8]．

3.2 ネットワーク CGL モデル

次に，ネットワークの各ノード上に振動性化学反応等 [15] のリミットサイクル振動子が置かれてい

て，それらの成分がエッジを通じて拡散する状況を考えよう．全ての振動子は同じ性質を持つとして，以下のネットワーク反応拡散系に従うとする．

$$\dot{\boldsymbol{X}}_j(t) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_j) + \mathbf{D}\sum_{\ell=1}^{N} L_{j\ell}\boldsymbol{X}_\ell \tag{3}$$

ここで，d 次元実ベクトル $\boldsymbol{X}_j$ は j $(=1,\cdots,N)$ 番目の振動子の状態，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_j)$ はそのダイナミクス，最後の項は拡散結合を表し，行列 $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(D_1,\cdots,D_d)$ は $\boldsymbol{X}_j$ の各成分の拡散定数，$L_{j\ell}$ は Laplacian 行列である [4]．これは先程のより一般的なモデル (1) において，$\boldsymbol{F}_j \equiv \boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{X}_j, \boldsymbol{X}_\ell) = \mathbf{D}(\boldsymbol{X}_\ell - \boldsymbol{X}_j)$ とした場合に対応する．

先程と同様，拡散結合がない場合，各振動子は安定なリミットサイクル軌道をひとつ持つものとする．このネットワーク上の拡散結合振動子系 (3) は，全ての振動子が同期したネットワーク上の一様振動解 $\boldsymbol{X}_j(t) \equiv \boldsymbol{X}^0(t)$ を常に持つ．これは，全ての振動子が同じ状態にあれば，拡散による物質の流れはなく，相互作用が消えるためで，Laplacian 行列が定義により $\sum_{\ell=1}^{N} L_{j\ell} = 0$ を満たすからである．

ここでは振動子間の拡散結合がある程度強く，振幅自由度の効く状況を扱いたい．よって，位相縮約法は使えないが，各振動子が超臨界 Hopf 分岐によってリミットサイクル振動を示す場合には，その分岐点近傍で，各振動子の状態を，不安定化した固定点からのずれの複素振幅を用いて近似的に記述できる．多重時間スケール展開等の弱非線形解析を行うと，式 (3) は，複素 Ginzburg-Landau(CGL) モデル

$$\dot{W}_j(t) = (1+ic_0)W_j - (1+ic_2)\left|W_j\right|^2 W_j + K(1+ic_1)\sum_{\ell=1}^{N} L_{j\ell}W_\ell \tag{4}$$

に縮約される [6]．ここで複素数 $W_j(t)$ は振動子 j の複素振幅を表し，$\boldsymbol{X}^S$ を不安定化した固定点，ω_0 を Hopf 振動数，$\boldsymbol{U}$ を固定点の Jacobi 行列の右零固有ベクトルとして，もとの変数 $\boldsymbol{X}_j$ とは $\boldsymbol{X}_j(t) - \boldsymbol{X}^S \propto W_j(t)\exp(i\omega_0 t)\boldsymbol{U} + c.c.$ という関係がある．c_0, c_1, c_2 は実パラメータ，K は変換された結合強度を表し，元の方程式 (3) より決まる．なお，CGL 方程式という名称は，相転移の理論に現れる時間依存の Ginzburg-Landau 方程式と形が似ていることによるが，出自は全く異なり，これをリミットサイクル振動子系について導いたのは蔵本と都筑である [13]．よって，蔵本-都筑方程式と呼ばれても良い．

さて，式 (4) の右辺の結合項を省いた方程式 $\dot{W}(t) = (1+ic_0)W - (1+ic_2)|W|^2 W$ は超臨界 Hopf 分岐点近傍の振動子の標準形で，複素平面上の単位円をリミットサイクル軌道として持ち，Stuart-Landau(SL) 振動子と呼ばれる [図 2(b)] [6]．よって，CGL モデル (4) は結合 SL 振動子系と見なせるので，結合強度 K が小さい場合にはこれをさらに位相縮約できる．複素振幅 $W_j(t)$ より適切に定義した位相 $\phi_j(t)$ のみの方程式に縮約すると，以下の形のネットワーク蔵本モデルが直接得られる [6]．

$$\dot{\phi}_j(t) = \omega - c\sum_{\ell=1}^{N} L_{j\ell}\sin(\phi_j - \phi_\ell + \alpha) \tag{5}$$

この場合，$A_{j\ell}$ の代わりに $L_{j\ell}$ が入り，振動数は全て等しく $\omega_j \equiv \omega = c_0 - c_2$ となり，結合強度 c は CGL モデルの結合強度 K に比例し，位相結合関数のパラメータ α は CGL モデルのパラメータを使って $\cos\alpha = (1+c_1c_2)/\sqrt{(1+c_1^2)(1+c_2^2)}$ で与えられる．パラメータ c_1, c_2 が $1+c_1c_2 < 0$ を満たせば $|\alpha| > \pi/2$ となり，相互作用は反発的となるが，これは後で述べる CGL モデルの一様振動状態が不安定化を起こす Benjamin-Feir 条件と同じである．

4 ネットワーク位相モデルの集団同期転移と位相波

スケールフリーネットワーク上の蔵本タイプの位相モデルの示す興味深い現象の例として，一宮 [11] による集団同期転移の研究と，Ko-Ermentrout [12] による定常な位相波の形成に関する研究を紹介する．いずれもスケールフリーネットワークを平均場近似して自己無撞着な議論を行うものである．

4.1 秩序パラメータ (大域平均場)

ランダムなスケールフリーネットワーク上の蔵本モデルも，古典的な大域結合系と同様に，集団同期転移を示す [図 3(b)]．系のマクロな位相コヒーレンス (同期の程度) は，ネットワーク上の全振動子の大域的な平均場である秩序パラメータ

$$R\exp(i\Phi) = \sum_{j=1}^{N} \frac{k_j}{k_{\mathrm{total}}}\exp(i\phi_j) \tag{6}$$

によって特徴づけることができる [11]. これは蔵本 [6] が大域結合系に対して導入したもののネットワーク版で, $k_{\rm total} = \sum_{j=1}^{N} k_j$ は次数の総和であり, 振動子から大域平均場への寄与を, ノードの次数による重みをつけて集計したものである. 大域結合系 (全結合ネットワーク) の場合, 単に $k_j/k_{\rm total} = 1/N$ となり, 古典的な定義に一致する. R がマクロな集団振動の振幅, Φ がその位相を与え, もし全振動子の位相が完全に同期していれば ($\phi_1 = \cdots = \phi_N$), マクロな振動の振幅は $R = 1$ となり, Φ は一定の振動数で増加する. 一方, 全ての振動子がばらばらに振る舞っていれば, R は $O(1/N)$ 程度の小さな値となり, N の大きな極限で消える.

以下, ネットワーク上の振動子数 N が十分に大きい場合を考え, 系は初期緩和の後, 動的定常状態に達するものとする. この状態で, 系は集団振動を起こして秩序パラメータ (大域平均場) が一定の振幅で定常回転すること, すなわち, 振幅 R が $[0, 1]$ の範囲にある一定値をとり, 位相が $\Phi = \Omega t$ のように定常に増加することを仮定する. ここで Ω は集団振動の振動数である.

4.2 ネットワークの平均場近似

本稿で用いるネットワークの平均場近似は, 結合の詳細は一切無視してノードの次数のみを残し, 各ノードは, その次数に比例した強さの系の大域的な平均場を感じるとする荒っぽい近似である [3,4,11,16,17]. しかし, スケールフリーネットワークのように, ノード間の経路長が小さく [4,20], 内部での拡散的混合が強い, 構造のないランダムなネットワークに対しては, かなり良い近似を与えることが知られており, ネットワーク上の伝染病感染モデル等, 各種のダイナミクスの解析に使われてきた [4,17].

まず, 振動子 j の感じる「局所場」を

$$r_j \exp(i\varphi_j) = \sum_{\ell=1}^{N} A_{j\ell} \exp(i\phi_\ell) \tag{7}$$

と導入して式 (2) を書き換えると,

$$\dot{\phi}_j(t) = \omega_j - c r_j \sin(\phi_j - \varphi_j + \alpha)$$

となる. ここで, 系が動的定常状態にあり, $R =$ 一定値, $\Phi = \Omega t$ であるとして, 局所場を以下のように平均場近似する.

$$r_j \simeq k_j R, \quad \varphi_j \equiv \Phi = \Omega t$$

つまり, 本来は式 (7) により振動子 j の結合相手の状態の総和として決まる局所場について, その振幅 r_j を系全体の大域平均場の振幅 R に他の振動子との結合本数 k_j を掛けたもので近似し, 位相 φ_j は単に全系の集団位相 Φ で置き換える.

さらに, 右辺に入る Ωt の項を消して方程式を自励系に書き直すため, 新しい変数 $\theta_j = \phi_j - \Omega t$ を導入して, 振動数 Ω の回転座標系に移行すると,

$$\dot{\theta}_j(t) = \omega_j - \Omega - c k_j R \sin(\theta_j + \alpha) \tag{8}$$

$$R = \sum_{j=1}^{N} \frac{k_j}{k_{\rm total}} \exp(i\theta_j) \tag{9}$$

となる. つまり, スケールフリーネットワーク上の位相モデルの近似として, 大域平均場への実効的な結合強度 (ck_j) が次数に依存するような, 平均場結合型の位相振動子モデルが得られた.

4.3 自己無撞着な取り扱い

以上の平均場近似の下で, 自己無撞着な解析を行うことができる. これは, 適当に仮定した平均場の値における振動子系の挙動を求め, それらによって作り出される平均場が, 仮定した平均場と一致するという条件を用いて, 同期条件等を求める手法であり, 蔵本によって大域結合位相モデルの解析に導入された [6].

式 (8) より, 大域平均場の振幅 R と振動数 Ω を仮定すれば, 振動子の位相 $\theta_j(t)$ のダイナミクスが決まる. 振動数 ω_j が $|\omega_j - \Omega| \le c k_j R$ の範囲にあれば, 安定な固定点と不安定な固定点のペアが存在する. 安定な固定点の位相は

$$\theta_j^{(0)} = \sin^{-1}\left(\frac{\omega_j - \Omega}{c k_j R}\right) - \alpha \tag{10}$$

を満たす値のうち $[-\pi/2, \pi/2]$ の範囲のもので与えられ, 振動子はこの位相で大域平均場にロックする. 一方, $|\omega_j - \Omega| > c k_j R$ であれば, 振動子は大域平均場に位相ロックできずにドリフトを続ける. この場合, 各位相値への滞在確率密度は, 位相の速度の逆数に比例するので, これを規格化した

$$P_j(\theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{(\omega_j - \Omega)^2 - (c k_j R)^2}}{|\omega_j - \Omega - c k_j R \sin(\theta + \alpha)|}$$

で与えられる．

さて，与えられた R と Ω に対し，ネットワーク上の各振動子の位相 θ_j のダイナミクスが決まったので，それらが集団として作り出す大域平均場を計算できる．位相ロックした振動子集団から R への寄与 $R_{\rm lock}$ は，$G_{\rm lock}=\{j:|\omega_j-\Omega|\le ck_jR\}$ として，

$$R_{\rm lock}=\sum_{j\in G_{\rm lock}}\frac{k_j}{k_{\rm total}}\exp\left[i\theta_j^{(0)}\right]$$

となる．また，ドリフトする振動子集団から R への寄与 $R_{\rm drift}$ は，$\exp(i\theta_j)$ を各位相への滞在確率密度 $P_j(\theta)$ で平均した値を $G_{\rm drift}=\{j:|\omega_j-\Omega|>ck_jR\}$ を満たす振動子について和をとって，

$$R_{\rm drift}\simeq\sum_{j\in G_{\rm drift}}\frac{k_j}{k_{\rm total}}\int_0^{2\pi}d\theta P_j(\theta)\exp(i\theta)$$

と表せる．各振動子はドリフトし続けるが，多数の振動子が互いに独立に動く動的定常状態にあるため，統計的には $R_{\rm drift}$ がほぼ一定値をとると考えている．

以上により，仮定した大域平均場 R,Ω に対して，振動子系のダイナミクスによって作られる大域平均場 $R'=R_{\rm lock}+R_{\rm drift}$ が決まるが，この R' は，仮定した R に等しくなくてはならない．この自己無撞着条件より，R,Ω を決める事ができる．

4.4 ネットワーク上の集団同期転移

まず $\alpha=0$ の場合を考える．この場合，ドリフトする振動子からの寄与 $R_{\rm drift}$ は θ 積分の際に消えて，位相ロックした振動子からの寄与 $R_{\rm lock}$ のみが残る．これを評価しよう．以下の計算では多数の振動子に関する和を，振動数の確率密度 $g(\omega)$ と次数分布 $P(k)$ による期待値で近似する．振動子数が十分に大きければ，次数の総和は $k_{\rm total}=\sum_{j=1}^N k_j\simeq N\langle k\rangle$ と近似でき，また，振動数と次数の適当な関数 $f(\omega,k)$ について $\sum_{j=1}^N f(\omega_j,k_j)/N\simeq\sum_k P(k)\int d\omega g(\omega)f(\omega,k)$ と近似できるので，自己無撞着条件は

$$R=R_{\rm lock}=\sum_{j\in G_{\rm lock}}\frac{k_j}{k_{\rm total}}\exp(i\theta_j^{(0)})$$

$$\simeq\sum_k P(k)k\int_{\Omega-ckR}^{\Omega+ckR}d\omega g(\omega)\exp[i\theta_{\omega,k}^{(0)}]\;/\langle k\rangle$$

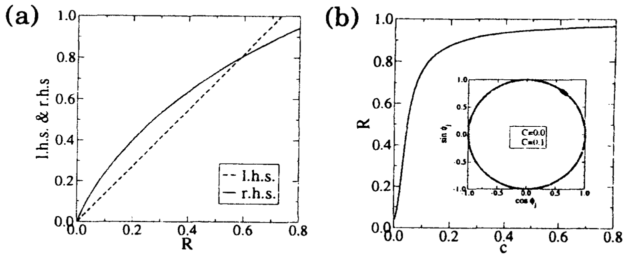

図 3 (a) 自己無撞着な解析．自己無撞着条件の左辺と右辺が $R>0$ で交われば，集団同期転移を示す． (b) スケールフリーネットワーク上の蔵本モデルの集団同期転移．結合強度 c と共に秩序パラメータ R が増大．挿入図は転移前 ($c=0$) と転移後 ($c=0.1$) での単位円上の振動子の分布．

である．ここで，$\theta_{\omega,k}^{(0)}$ は与えられた R,Ω での振動数 ω，次数 k の振動子の安定固定点で，式 (10) より

$$\cos\theta_{\omega,k}^{(0)}=\sqrt{1-\left(\frac{\omega-\Omega}{ckR}\right)^2},\quad \sin\theta_{\omega,k}^{(0)}=\frac{\omega-\Omega}{ckR}$$

を満たす．位相ロックするという条件より，ω に関する積分は $\Omega-ckR<\omega<\Omega+ckR$ の範囲で行う．固定点の値を代入し，$\omega'=\omega-\Omega$, $\omega''=(\omega-\Omega)/(ckR)$ と変数変換すれば，自己無撞着条件は，

$$\langle k\rangle R=\sum_k P(k)k\int_{-ckR}^{ckR}d\omega' g(\omega'+\Omega)\exp[i\theta_{\omega'+\Omega,k}^{(0)}]$$

$$=cR\sum_k P(k)k^2\int_{-1}^{1}d\omega'' g(\omega''ckR+\Omega)\sqrt{1-\omega''^2}$$

$$+icR\sum_k P(k)k^2\int_{-1}^{1}d\omega'' g(\omega''ckR+\Omega)\omega''$$

と書き換えられる．

まず，左辺は実なので，右辺の虚部は消えなくてはならず，この条件より Ω が決まる．特に，$g(\omega)$ が振動数 ω_0 の回りに対称な分布で，$g(\omega_0+\omega)=g(\omega_0-\omega)$ を満たすなら，集団振動数 Ω は平均振動数 ω_0 と等しくなる．また，実部が等しいという条件より，

$$\langle k\rangle R=cR\sum_k P(k)k^2\times\int_{-1}^{1}d\omega'' g(\omega''ckR+\Omega)\sqrt{1-\omega''^2}$$

という条件が得られる．これを R の関数と見ると，左辺は原点を通る傾き $\langle k\rangle$ の直線を与え，右辺は原点を通り，$R=1$ で $\langle k\rangle$ より小さな定数で抑えられる

曲線を与えるので，両者は $R=0$ に加え，$0<R\leq 1$ のどこかで交わる可能性がある [図 3(a)]．$R=0$ の近傍に着目すると，右辺の原点での傾きは，

$$c\sum_k P(k)k^2\int_{-1}^{1}d\omega''g(\Omega)\sqrt{1-\omega''^2}=c\frac{\pi g(\Omega)}{2}\langle k^2\rangle$$

だが，これが左辺の傾き $\langle k\rangle$ より大きければ，両者は $R>0$ で交わる点を持つ．よって，結合強度が

$$c\geq\frac{2}{\pi g(\Omega)}\frac{\langle k\rangle}{\langle k^2\rangle} \qquad (11)$$

であれば，集団振動の振幅 R がゼロではない値をとり，集団同期転移が生じることが予想される．この式の右辺が臨界結合強度を与える [図 3(b)]．

さて，スケールフリーネットワークのベキ的な次数分布 $P(k)\propto k^{-\gamma}$ を考え，平均次数 $\langle k\rangle$ を固定しつつ，ネットワークの大きな極限を考えると，前の章で示したように，$2<\gamma\leq 3$ の場合，$\langle k^2\rangle$ が発散するので，式 (11) の右辺の係数 $\langle k\rangle/\langle k^2\rangle$ は 0 に近づく．よって，この範囲のベキ指数を持つ場合，大きなネットワークほど集団同期を生じる臨界結合強度が小さくなり，無限に大きなネットワークの極限では，結合強度 $c\to 0$ の極限でも集団同期転移が生じることが示唆される*1.

一宮 [11] は，以上のような考え方によってスケールフリーネットワーク上の蔵本モデルの集団同期転移の存在と臨界結合強度を予想し，これを数値計算により確かめた．この結果は，スケールフリーネットワーク上の伝染病拡散モデルにおいては，感染確率が 0 の極限でも伝染病が蔓延し得るという良く知られた結果 [4] との類似性から，興味を惹いている．なお，この解析も平均場近似によるもので，$\langle k\rangle$ と $\langle k^2\rangle$ の比が重要な役割を果たす．

4.5 ネットワーク上の位相波

次に，$\alpha\neq 0$ の場合を考えよう．大域結合系の場合は，坂口-蔵本によって扱われた [8]．スケールフリーネットワーク上でも，平均場近似の元で，数値計算を併用すれば，式 (8), (9) より R,Ω を自己無撞着に決める事ができる．相互作用は引力的 $|\alpha|<\pi/2$ だとする．ここでは，全ての振動子の振動数 ω_j が同じ値 ω である場合を考えよう．もし $\alpha=0$ ならドリフトする振動子から大域平均場への寄与 $R_{\rm drift}$ が消えるため，単に $\Omega\equiv\omega$ となり，式 (10) より全ての振動子は外力に位相差 0 でロックして，$c>0$ でさえあれば，常に完全同期する．一方，$\alpha\neq 0$ の場合，$R_{\rm drift}$ は消えず，ω と Ω は一致しない．また，式 (10) で決まる振動子が大域平均場にロックする位相も，個々の振動子の次数 k_j に応じてずれる．さらに，k_j がある値より小さくなると，位相ロックが外れてドリフトするようになる．Ko-Ermentrout はこのような状況を解析して，スケールフリーネットワーク上の位相モデルの動的定常状態における位相パターンを求めた [12]．

ここでは筆者自身の結果を示す (Ko-Ermentrout の論文が先に出たため，投稿を見合わせた)．前節のように，次数分布による平均はせず，与えられたランダムスケールフリーネットワークの次数 k_j を式 (8), (9) に直接代入して，数値的に R,Ω を求める．図 4(a) に動的定常状態における回転座標系で見た位相 $\theta_j(t)$ のスナップショットを示す．2 章で述べたように，ノードの番号 j を次数の順に振ってあるため，ネットワーク上の位相パターンが位相勾配を持つパターンとして可視化されており，自己無撞着性の議論によって決めた R,Ω を用いて式 (10) によって描

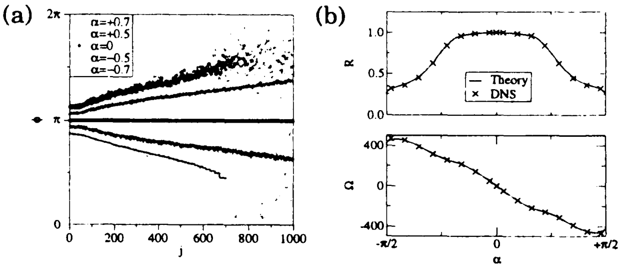

図 4　ランダムスケールフリーネットワーク上の位相波．(a) 定常状態でのスナップショット．横軸はノード番号 (次数の大きい順にソート)．$\omega=1.0$, $c=5.0$, $N=1000$, $\langle k\rangle=20$ で，いくつかの α の値について表示．(b) 自己無撞着理論により得られた集団振動の振幅 R と振動数 Ω を直接数値計算により得られた値と比較．横軸は α で，$\alpha=0$ の時 $\Omega=0$ となるように位相を定義している．

*1 なお，大域結合蔵本モデルの場合，結合関数を N で割ることにより，妥当な熱力学極限が取れ，有限の臨界結合強度が得られるのであり，もし N で割らなければ，臨界結合強度は N の増加とともに 0 に近づく．スケールフリーネットワークの場合にも，結合関数を N の適当なベキ乗で結合関数を割れば，有限の転移点を得られるが，そのようなスケーリングを選ぶ直観的な理由が明らかではない．

いた理論曲線と良く一致している．α の値によって位相波の勾配は異なり，特に $|\alpha|$ が大きい場合には，番号 j の大きな振動子 (次数 k_j の小さな振動子) の大域平均場への位相ロックが外れてドリフトしており，位相が散らばっている．図 4(b) には系の直接数値計算によって得た R, Ω をパラメータ α の関数として示す．自己無撞着性の議論によって決めた値とよく一致していることが分かる．回転座標系に移る前の元の変数 $\phi_j(t)$ で見れば，これはネットワーク上の次数の大きなノードから小さなノードへ，あるいはその逆の方向に伝播する波に見える．

5 ネットワーク CGL モデルの拡散誘起不安定性とカオス

次に，振動子間の結合がある程度強く，振幅の自由度が効く状況を考えよう．この場合，振動子が超臨界 Hopf 分岐点近傍にあれば，CGL モデルに縮約できる．CGL モデルは，振幅効果により，位相モデルよりもさらに多彩なダイナミクスを示し得る．ここでは，拡散の影響によるネットワーク上の一様振動 (完全同期) 状態の不安定化と，その結果として生じるいくつかの動的パターンについて，筆者の論文 [16] に基づいて説明する．

5.1 一様振動解の線形安定性

ネットワーク上の拡散結合振動子系 (3) は，全ての振動子が同期したネットワーク上の一様振動解 $\boldsymbol{X}_j(t) \equiv \boldsymbol{X}^0(t)$ を常に持つ．これは，Laplacian 行列が $\sum_{\ell=1}^N L_{j\ell} = 0$ を満たすからである．これに対応して，分岐点近傍で縮約したネットワーク上の CGL モデル (4) も一様振動解 $W_j(t) \equiv W^0(t) = \exp[i(c_0 - c_2)t]$ $(j = 1, \cdots, N)$ を持つ．しかし，古典的な連続媒質上の CGL 方程式では，拡散の効果によって逆に空間一様振動解が不安定化して時空カオス状態に至るという，直観に反する現象が知られており，一般のネットワーク上でも同種の不安定化が起きるのか，また，その場合どのようなダイナミクスが生じるのかは興味深い．なお，このような拡散誘起不安定性の例としては，活性抑制因子系における Turing 不安定性が有名である．

これを見るために，一様振動解 $W_j(t) \equiv W^0(t)$ の線形安定性を調べよう．各ノード上の振幅と位相への摂動をそれぞれ $\rho_j(t)$, $\chi_j(t)$ として，摂動解 $W_j(t) = W^0(t)[1 + \rho_j(t)]\exp[i\chi_j(t)]$ を式 (4) に代入して線形化すると，以下の方程式が得られる．

$$\dot{\rho_j}(t) = -2\rho_j + K\sum_{\ell=1}^{N} L_{j\ell}(\rho_\ell - c_1\chi_\ell)$$

$$\dot{\chi_j}(t) = -2c_2\rho_j + K\sum_{\ell=1}^{N} L_{j\ell}(c_1\rho_\ell + \chi_\ell)$$

2 章で述べた Laplacian 固有ベクトルで摂動を

$$(\rho_j, \chi_j) = \sum_{\alpha=1}^{N}(\rho^{(\alpha)}, \chi^{(\alpha)})\chi_j^{(\alpha)} \exp\left(\lambda^{(\alpha)} t\right)$$

と展開して線形化方程式に代入すると，各モードの線形成長率が

$$\lambda_{\pm}^{(\alpha)} = -1 + K\Lambda^{(\alpha)} \pm\sqrt{1 + 2c_1c_2\left\{K\Lambda^{(\alpha)}\right\} - c_1^2\left\{K\Lambda^{(\alpha)}\right\}^2}$$

と計算される．もしある α について $\mathrm{Re}\ \lambda_{\pm}^{(\alpha)} > 0$ が成立するなら，そのモードは不安定化する．

この線形成長率 $\lambda_{\pm}^{(\alpha)}$ を $K\Lambda^{(\alpha)}$ で展開すると，

$$\lambda_{+}^{(\alpha)} = (1 + c_1c_2)K\Lambda^{(\alpha)} + O(\left\{K\Lambda^{(\alpha)}\right\}^2)$$

となる．よって，$1 + c_1c_2 < 0$ ならば，小さな $K\Lambda^{(\alpha)}$ に対して，$\mathrm{Re}\ \lambda_{+}^{(\alpha)}$ が正となり得ることが分かる ($K \geq 0$, $\Lambda^{(\alpha)} \leq 0$ に注意)．ただし，Laplacian 固有値 $\Lambda^{(\alpha)}$ は離散的なので，単にこの条件が満たされるだけでなく，実際に線形成長率が正となる位置に固有値が存在しなければ，不安定化は起こらない．

この $1 + c_1c_2 < 0$ の条件は，古典的な連続媒質上の CGL 方程式において，摂動の位相ブランチに長波長の変調不安定性が生じるための Benjamin-Feir 条件として知られるものに等しく [6]，一般のネットワーク上でも同じ条件下で一様解が不安定化し得ることが分かる．大域結合あるいは非局所結合した CGL モデル系においても，やはり同じ条件で一様解が不安定化することが知られている [18,19]．さらに，3 章で述べた CGL モデルをさらに縮約した蔵本モデルにおいて，位相結合関数が斥力的となる条件とも一致する [6]．もちろん，不安定化した後の挙動は，相互作用のトポロジーに強く依存し，ネットワーク毎に大きく異なることが予想される．

5.2 複雑ネットワーク上の非一様ダイナミクス

不安定後の挙動を調べるために，CGL モデル (4) のパラメータを Benjamin-Feir 不安定条件を満たす $c_1 = -2$, $c_2 = 2$ にとり (c_0 は一般性を失わず 0 と置ける)，一様振動状態に弱い摂動を与えた初期条件から結合強度 K を変えて数値計算を行った．

まず，K が十分小さい場合 ($K < 0.001$)，ほとんどの Laplacian 固有値に対応するモードは線形不安定となる．振動子の状態はほぼ非摂動リミットサイクル上にあるため，CGL モデル (4) をさらに位相モデル (5) に縮約することができて，得られた位相結合関数のパラメータが $\alpha = \arccos(-3/5) \simeq -2.21$ となる．これは $|\alpha| > \pi/2$ を満たすので，位相間の相互作用が反発的な場合となる [6]．実際，数値計算でも，各々の振動子がほぼリミットサイクル上にあって，互いにインコヒーレントでばらばらな非同期状態を示すことが観察された．一方，K が十分に大きい場合 ($K > 0.165$)，Benjamin-Feir 条件は満たされていても，離散的な Laplacian 固有値が線形成長率が正となる範囲には存在しなくなり，一様振動解は線形安定のままで，数値計算では単なる完全同期状態が見られた．これらのふたつの状況の中間的な結合強度における数値計算によって，以下のような典型的な動的定常状態が観察された．

(i) 部分振動停止状態 [図 5(a),(d)]．K を若干大きくすると ($0.006 < K < 0.028$)，一部の大きな次数 k_j(小さなノード番号 j) の振動子集団が振動を停止して原点近傍にとどまり，他の振動子はその周囲をインコヒーレントに回転する状況が観察された．

(ii) カオス状態 [図 5(b),(e)]．さらに K を大きくすると ($0.028 < K < 0.078$)，振動子集団が次数 k_j に応じて大体 3 つの異なるグループに分かれる乱れた状態が観察された．第 1 グループは原点近傍にあり，第 3 グループは大体リミットサイクル軌道上に分布して原点の周りを回転したが，中間の第 2 グループは原点とリミットサイクルの間に広く分散してカオティックな挙動を示した．この状態は系の初期条件に鋭敏で，カオス的であった．

(iii) クラスター状態 [図 5(c),(f)]．さらに K が大きい場合 ($0.078 < K < 0.164$)，振動子間の相互関係は凍結され，系全体がひとつの固まりとして剛体的に回転する状況が見いだされた．このとき，小さな次数 k_j(大きなノード番号 j) を持つ振動子集団が，振幅や位相の異なるふたつのグループに分かれるクラスタリング現象を示した [18]．

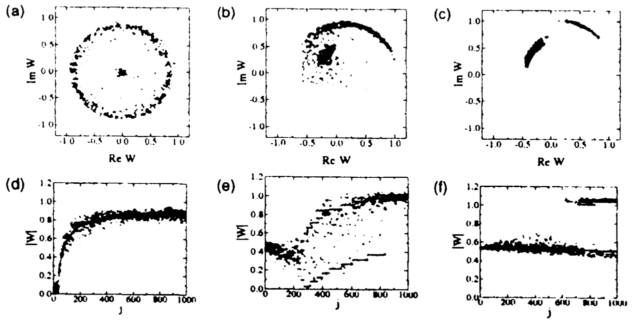

図 5 スケールフリーネットワーク上の CGL モデルのダイナミクス (動的定常状態におけるスナップショット)．(a,d) 部分振幅停止状態 ($K = 0.02$)，(b,e) カオス状態 ($K = 0.04$)，(c,f) クラスター状態 ($K = 0.08$)．(a),(b),(c) は全ての振動子の複素振幅 $\{W_j\}$ の分布，(d),(e),(f) は振動子間の複素振幅の大きさ $|W_j|$ をノード番号 j に対して表示．(d),(e),(f) の実線は平均場近似によるもの．

このように，CGL モデルは，振幅自由度の効果により，位相モデルの場合に生じた完全同期状態や位相ロック状態とは異なる，非一様性の強い非自明なダイナミクスを示すことが分かった．

5.3 ネットワークの平均場近似

数値計算で観察されたネットワーク上の非一様パターンを理解するため，平均場近似による解析を試みる．位相モデルの場合と同様に，系の大域平均場を各振動子の状態の次数の重み付き平均として導入しよう．

$$H(t) = \sum_{j=1}^{N} \frac{k_j}{k_{\mathrm{total}}} W_j(t)$$

これは位相モデルの解析で導入した式 (6) に類似した量で，全ての振動子が同期していれば，$W_j(t) \equiv \exp[i(c_0 - c_2)t]$ なので，$|H(t)| = 1$ となり，ばらばらに振る舞っていれば $|H(t)|$ は $O(1/N)$ の小さな値をとる．各振動子の感じる局所場

$$h_j(t) = \sum_{\ell=1}^{N} A_{j\ell} W_\ell(t)$$

を導入し，これを先程と同様に

$$h_j(t) \simeq k_j H(t)$$

と近似してしまう．すると，CGL モデルの拡散項は

$$\sum_{\ell=1}^{N} L_{j\ell} W_{\ell} = h_j(t) - k_j W_j$$

と表され，これにより，CGL モデルは

$$\dot{W}_j(t) = (1+ic_0)W_j - (1+ic_2)\,|W_j|^2\,W_j + k_j K(1+ic_1)\{H(t) - W_j\} \quad (12)$$

と書き換えられる．すなわち，平均場近似の下では振動子間の直接結合はなくなり，個々の SL 振動子 $j\ (=1,\cdots,N)$ が単に共通の場 $H(t)$ に次数に応じた強さで駆動されることとなる．

さて，直接数値計算の結果によると [図 6(a)]，前節で示した 3 つの動的定常状態での $H(t)$ のダイナミクスは，ほぼ正弦波

$$H(t) = B\exp(i\Omega t) \quad (13)$$

で近似できることが分かる．ここで B は大域平均場の振幅，Ω は振動数である．なお，CGL モデルの場合，位相モデルの場合とは違い，パラメータによって $H(t)$ は単なる正弦波だけでなく準周期的あるいはカオティックな波形も示すが，以下ではそのような状況は考えない．

5.4 振動子の分岐図による振幅パターンのフィット

以上の近似により，ネットワーク上の個々の SL 振動子 j が正弦波的な周期外力 $H(t)$ にその次数 k_j に比例する強さで駆動されるという一体問題が得られた．式 (12) より，パラメータと周期外力 $H(t)$ が与えられれば，実効的な結合強度 $\beta = k_j K$ がこの振動子の分岐パラメータとなることが分かる．実際，この値を変化させると，SL 振動子は固定点やリミットサイクル，それらが共存する状態などを示す．このことから，式 (12) で表される周期外力に駆動される単一の振動子の分岐図を求め [図 6(b)]，それを $\beta = k_j K$ の関係を用いてノード番号 j の関数としてプロットすると，数値計算によって得られた振幅パターンをある程度説明できると期待される [図 6(c)]．このような解析は，過去に大域結合 CGL モデルに対して中川-蔵本や Chabanol-Hakim-Rappel らによって適用された [18]．実際に上で述べた 3 つの典型的な状態において，数値計算よって大域平均場の振幅と振動数 B, Ω の値を見積もり，式 (12) に

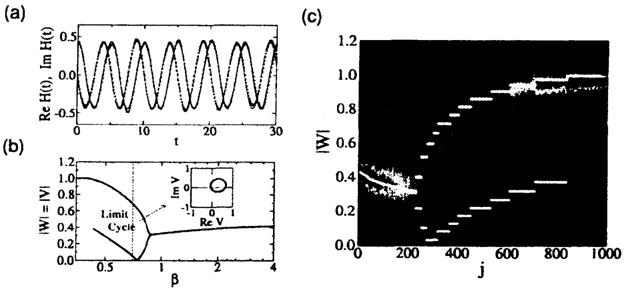

図 6　CGL モデルの非一様パターンの平均場近似による理解 ($K = 0.04$)．(a) ネットワーク上の大域平均場 $H(t)$ の実部と虚部 (直接数値計算)．(b) 周期外力を受けた単一の振動子の分岐ダイアグラム．複素振幅の絶対値 $|W_j|$ の最大値と最小値を実効的な結合パラメータ $\beta = Kk_j$ に対してプロット．(c) 直接数値計算によって得られた複素振幅の絶対値 $|W_j|$ の分布と平均場近似の結果の比較．周期外力を受けた単一の振動子の分岐ダイアグラムをノード番号 j の関数として表示．

代入すると，このような荒っぽい近似の下でも，図 5,6 に示すように，動的定常パターンの骨格部分をほぼ説明できることが分かる．

なお，以上の議論は，数値計算によって得た大域平均場のパラメータを使って得られたパターンをフィットしたものであり，位相モデルの場合のような自己無撞着理論ではない．CGL モデルの場合，$H(t)$ が正弦波的とは限らず，また，$H(t)$ が正弦波的でも，パラメータによっては，振動子のダイナミクスが複数のアトラクタを持つ，例えば，複数の安定固定点を持つことや，リミットサイクルと固定点が共存することなどがあり得る．その場合，各振動子がどのアトラクタに到達するかは，初期条件に複雑に依存し，その比率を決定することは難しい．これに対して，位相モデルの場合，大域平均場のダイナミクスは常に正弦波的で，振動子のダイナミクスは大域平均場に位相ロックするかドリフトするかのどちらかであった．このような事情のため，CGL モデルの自己無撞着理論による扱いは困難である．しかし，CGL モデルの場合も，結合強度やパラメータの限られた範囲では，式 (12) と式 (13) を数値的に解いて，大域平均場 $H(t)$ の振幅と振動数 B, Ω をある程度決めることはできる．

6 まとめ

スケールフリーネットワーク上の結合リミットサイクル振動子系において，相互作用が弱い場合に有効な位相モデルの示す集団同期転移や位相波の形成と，振動子が超臨界 Hopf 分岐点近傍にある場合に有効な CGL モデルの示すカオスやクラスタリング等の現象について述べた．特に，これらの状態の理解に，スケールフリーネットワークの平均場近似が役立つことを示した．

平均場近似がうまく働いたことは，スケールフリーネットワークにおいては，ネットワーク内に単一の大域平均場が生成され，各振動子は実効的にこの場を通じて他の振動子と相互作用していると見なせることを意味する．その理由として，スケールフリーネットワークの径がそのサイズに比べて非常に小さく (スモールワールド性)，拡散的混合が非常に強いことと，今回用いたスケールフリーネットワークには次数不均一性以外には構造がないため，ネットワークの構造を一切無視して次数のみを残しても問題がなかったことが挙げられる．これにより，ネットワーク上の振動子系は，次数に応じて共通の平均場に結合した振動子系に書き換えられ，これに対して自己無撞着な解析等を行うことにより，各種の挙動をある程度説明することができた．

なお，本稿で紹介した平均場近似による解析は，大域結合した位相モデルや CGL モデルに対して行われてきた古典的な解析を，若干一般化したものに過ぎない．しかし，スケールフリーネットワークの強い次数不均一性が本質的な効果を持ち，大域結合系では見られない各種の興味深い現象が生じた．今後の展望としては，階層モジュール構造のある複雑ネットワーク上の結合振動子系の解析や，よりスパースで平均場近似が適用できない状況の解析，外力によるネットワーク上のパターンの制御，望ましいダイナミクスを実現するようなネットワークのデザイン等が興味深い話題だと思われる．

謝辞・追記

数学者ではない私が力学系研究集会で発表する事を認めて頂いた主催者の新居俊作先生に感謝します．また，本稿を執筆中の 12 月 1 日，私の出身研究室の後輩である田中ダン氏の突然の訃報に接しました．若くて優秀な友人を失った事が残念でなりません．この場を借りて哀悼の意を表したいと思います．

参考文献

[1] S. H. Stogatz, Nature **410**, 268 (2001).

[2] R. Albert and A. -L. Barabási, Rev. Mod. Phys. **74**, 47 (2002).

[3] S. Boccaletti, *et al.*, Phys. Rep. **424**, 175 (2006).

[4] A. Barrat, B. Barthélemy and A. Vespignani, *Dynamical Processes on Complex Networks*, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[5] A. T. Winfree, *The geometry of biological time*, Springer, 2001.

[6] Y. Kuramoto, *Chemical oscillations, waves, and turbulence*, Springer, 1984.

[7] 蔵本由紀，リズム現象の世界，東京大学出版会 (2005).

[8] H. Sakaguchi and Y. Kuramoto, Prog. Theoret. Phys. **76**, 576 (1986).

[9] A. Arenas, *et. al.*, Phys. Rep. **469**, 93 (2008).

[10] 中尾 裕也，システム／制御／情報 **53**, 316 (2009); http://www.ton.scphys.kyoto-u.ac.jp/~nakao/Etc/phasereduction-iscie.pdf

[11] T. Ichinomiya, Phys. Rev. E **70**, 026116 (2004).

[12] T. -W. Ko and G. B. Ermentrout, Phys. Rev. E **78**, 016203 (2008).

[13] Y. Kuramoto and T. Tsuzuki, Prog. Theoret. Phys. **52**, 1399 (1974).

[14] B. Bollobás, *Modern Graph Theory*, Springer, 2002.

[15] A. S. Mikhailov and K. Showalter, Phys. Rep. **425**, 79 (2006).

[16] H. Nakao and A. S. Mikhailov, Phys. Rev. E **79**, 036214 (2009).

[17] R. Pastor-Satorras and A. Vespignani, Phys. Rev. Lett. **86**, 3200 (2001).

[18] V. Hakim and W. -J. Rappel, Phys. Rev. A **46**, R7347 (1992); N. Nakagawa and Y. Kuramoto, Prog. Theor. Phys. **89**, 313 (1993); M. -L. Chabanol, V. Hakim, and W. -J. Rappel, Physica D **103**, 273 (1997).

[19] Y. Kuramoto, Prog. Theor. Phys. **94**, 321 (1995); Y. Kuramoto and H. Nakao, Phys. Rev. Lett. **76**, 4352 (1996); H. Nakao, Chaos **9**, 902 (1999).

[20] R. Cohen and S. Havlin, Phys. Rev. Lett. **90**, 058701 (2003).

[21] S. Jianbo and J. Malik, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, **22**, 888 (2000).