

# Visible actions on multiplicity-free spaces \*

笹木 集夢 (Atsumu SASAKI)

早稲田大学理工学術院 基幹理工学部数学科

## 1 はじめに

本研究集会では、無重複空間 (multiplicity-free space) を強可視的作用 (strongly visible action) の立場から説明できることについて紹介させていただいた。

無重複空間とは、その上の多項式環が無重複表現をもつという、表現論における特別なクラスである (定義 2.1 参照). 一般に、ヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  上のリー群  $G$  のユニタリ表現  $\pi$  が無重複 (multiplicity-free) であるとは、連続な  $G$ -絡作用素全体のなす環  $\text{End}_G(\mathcal{H}) := \{f \in \text{End}(\mathcal{H}) : \pi(g) \circ f = f \circ \pi(g) (\forall g \in G)\}$  が可換環であるときをいう<sup>1</sup>. また、位相ベクトル空間  $W$  上の  $G$  の連続表現  $\omega$  が無重複であるとは、単射かつ連続な  $G$ -絡作用素  $\mathcal{H} \hookrightarrow W$  をもつ任意の  $G$  のユニタリ表現  $(\pi, \mathcal{H})$  が無重複であるときをいう<sup>2</sup>. 無重複表現は、これまでに様々な手法で発見されてきたものの、統一的な説明は与えられていなかった。

T. Kobayashi は、複素多様体にリー群が正則に作用するという設定の下で (強) 可視的作用という複素幾何における概念を導入し (定義 2.3, 注意 2.4 参照), (強) 可視的作用を底空間にもつベクトル束において、ファイバー上の表現から切断全体の空間上の表現への無重複性の伝播定理を証明した [9, 11] (事実 2.10 も参照). これにより無重複表現に対して統一的な説明を与えることができる, という理論が進展している。

本講究録では、(有限次元) 複素ベクトル空間  $V$  上の複素簡約リー群  $G_{\mathbb{C}}$  の正則表現に対し、 $V$  が無重複空間であることと、 $V$  への線型作用が強可視的作用をもつことが同値であることについて解説する (定理 3.1 参照). また、無重複表現の既約分解と強可視的作用のもつスライス (定義 2.3 参照) との関係について述べる (定理 3.3 参照).

---

\*京都大学数理解析研究所研究集会「表現論と組合せ論」(研究代表者: 森田英章氏, 副代表者: 山田裕史氏, 北海道大学, 2009 年 8 月 25 日-28 日) における講究録.

<sup>1</sup>この定義は、連続スペクトルを含む無限次元表現も込めた定義である. 特に、 $\dim \mathcal{H} < \infty$  のときは、この定義は有限次元表現の場合に採用される定義  $\dim \text{Hom}_G(\tau, \pi) \leq 1 (\forall \tau \in \widehat{G})$  と同値である.

<sup>2</sup>連続表現  $\omega$  がこの意味で無重複表現ならば、 $\dim \text{Hom}_G(\tau, \omega) \leq 1 (\forall \tau \in \widehat{G})$  が成り立つ. また、 $\omega$  自身がユニタリ表現ならば、ユニタリ表現の定義と連続表現の定義は同値である ([9, Proposition 1.5.5]).

本講究録に関する内容は、論文 [16, 18] に基づいており、また [17] で [16] の内容を中心とした日本語の解説を与えた。よって、本講究録は、[16, 18] の内容を講演に沿った形でまとめることに主眼を置き、細かい証明は省略した。

## 2 準備

この章では、無重複空間と強可視的作用についてそれぞれ復習する。前半では、無重複空間の定義や関連する結果を紹介する。後半では、強可視的作用の定義と例を紹介し、無重複表現との関連について概説する。

### 2.1 無重複空間

この節では、無重複空間に関する基本概念や関連する結果について整理しよう (cf. [1, 2, 3, 6, 7, 14]).

$V$  を (有限次元) 複素ベクトル空間とし、 $G_{\mathbb{C}}$  を連結な複素簡約リー群とする。 $V$  上に  $G_{\mathbb{C}}$  の正則表現  $\varpi : G_{\mathbb{C}} \rightarrow GL_{\mathbb{C}}(V)$  を与える。このとき、多項式環  $\mathbb{C}[V]$  上に  $G_{\mathbb{C}}$  の表現  $\pi$  が  $f \in \mathbb{C}[V]$  と  $g \in G_{\mathbb{C}}$  に対して

$$f(v) \mapsto (\pi(g)f)(v) = f(\varpi(g)^{-1}v) \quad (v \in V)$$

によって定義される。

**定義 2.1.** 表現  $\pi$  が無重複表現であるとき、 $(G_{\mathbb{C}}, V)$  を無重複空間 (multiplicity-free space) という。

以下、 $G_{\mathbb{C}}$  の交換子群を  $H_{\mathbb{C}} := [G_{\mathbb{C}}, G_{\mathbb{C}}]$  とする。これは、 $G_{\mathbb{C}}$  の半単純部分を表す。

V. Kac は、 $\varpi$  が既約な場合に無重複空間を分類した ([6])。既約な場合の分類は、14 種類の無重複空間  $(H_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}^{\times}, V)$  で構成されている。そのうち、1次元の中心  $\mathbb{C}^{\times}$  を取り除いても無重複空間であるもの、つまり  $(H_{\mathbb{C}}, V)$  が無重複空間であるものも存在する<sup>3</sup>。一方で、 $(H_{\mathbb{C}}, V)$  が無重複空間であるとき、 $H_{\mathbb{C}}$  の  $V$  における作用に関する軌道は  $H_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}^{\times}$  のそれと一致する。特に、 $(H_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}^{\times}, V)$  は無重複空間である。

既約な場合の分類が行われてからしばらく後、C. Benson–G. Ratcliff [1] と A. Leahy [14] がそれぞれ独立に可約な場合を分類した。分類にある可約な無重複空間  $(G_{\mathbb{C}}, V)$  は  $V$  が2つの既約成分で生成される。つまり、 $V = V_1 \oplus V_2$  と表される。また、その中で  $V_1 \oplus V_2$  が  $H_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}^{\times}$  あるいは  $H_{\mathbb{C}}$  の無重複空間となるもの (つまり、 $G_{\mathbb{C}}$  の中心の次元が  $V$  の既約成分の個数よりも小さい場合) も存在する<sup>4</sup>。

<sup>3</sup> $(SL(2n+1, \mathbb{C}), \wedge^2(\mathbb{C}^{2n+1}))$  や  $(Spin(10, \mathbb{C}), \mathbb{C}^{16})$  など。

<sup>4</sup> $(H_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}^{\times}, V_1 \oplus V_2)$  が無重複空間となる例は、 $(SL(n, \mathbb{C}), \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n)$  ( $n \geq 3$ ) や  $(SL(m, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C}) \times SL(n, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{\times}, (\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^2) \oplus (\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^{2n}))$  ( $m > 2, n \geq 2$ ) などがある。また、 $(\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^2) \oplus (\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^{2n})$  は  $m, n > 2$  のとき  $SL(m, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C}) \times SL(n, \mathbb{C})$  の無重複空間である。

次に、表現  $(\pi, \mathbb{C}[V])$  の既約分解を考えよう。Cartan–Weyl の最高ウェイト理論により、 $G_{\mathbb{C}}$  の既約な有限次元正則表現は最高ウェイトによってパラメータ付けされる。  $\rho_{\lambda}$  を  $\lambda$  を最高ウェイトにもつ  $G_{\mathbb{C}}$  の既約な正則表現とする。無重複空間  $(G_{\mathbb{C}}, V)$  に対して、表現  $(\pi, \mathbb{C}[V])$  は離散直和に分解され、その既約分解を

$$\pi \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \rho_{\lambda}$$

と表す。このとき、最高ウェイトのなす集合  $\Lambda$  は、 $\mathbb{Q}$  上線型独立な生成元  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  を用いて  $\Lambda = \mathbb{N}\lambda_1 + \dots + \mathbb{N}\lambda_k$  と表される自由半群であることが知られている。

**定義 2.2.** 自由半群  $\Lambda$  の生成元の個数を、無重複空間  $(G_{\mathbb{C}}, V)$  の階数 (rank) という。

具体的な生成元および階数の計算は、 $\varpi$  が既約な場合は R. Howe–T. Umeda [5] によって、可約な場合は C. Benson–G. Ratcliff [2] や F. Knop [7] によって行われた。

## 2.2 複素多様体における強可視的作用

この節では、Kobayashi によって提唱された強可視的作用の概念について説明しよう。

$G$  をリー群とし、 $D$  を連結な複素多様体とする。いま、 $G$  が  $D$  に正則に作用していると仮定する<sup>5</sup>。

**定義 2.3** ([9, Definition 3.3.1]). この作用が強可視的 (strongly visible) であるとは、次の条件を満たす  $D$  の実部分多様体  $S$  と  $D$  上の反正則微分同相写像  $\sigma$  が存在するときをいう：

$$D' := G \cdot S \text{ は } D \text{ の開集合である,} \quad (\text{V.1})$$

$$\sigma|_S = \text{id}_S, \quad (\text{S.1})$$

$$\sigma \text{ は } D' \text{ 内の各 } G\text{-軌道を保存する.} \quad (\text{S.2})$$

上を満たす  $S$  をスライス (slice) という。

**注意 2.4.** 強可視的ならば、可視的 (visible) である ([9, Theorem 4]).  $G$  の  $D$  への正則な作用が可視的 (visible) であるとは、 $D$  の全実部分多様体  $S$  が存在して<sup>6</sup>、(V.1) を満たし、かつ任意の  $x \in S$  に対して  $J_x(T_x S) \subset T_x(G \cdot x)$  を満たすときをいう。ただし、 $J$  は複素多様体  $D$  の複素構造を表す。

**注意 2.5.** 定義 2.3 にあるスライス  $S$  は、自動的に全実部分多様体になる。

<sup>5</sup> $G$  が複素リー群であることは仮定しない。例 2.7 参照。

<sup>6</sup> $T_x S \cap J_x(T_x S) = \{0\}$  がすべての  $x \in S$  で成り立つことをいう。

強可視的作用は、無限個の軌道を扱う。以下に、1次元複素ベクトル空間内における強可視的作用の例を紹介する。複素平面上で軌道を実際に実現することで強可視的作用の概念の理解を深めよう。

例 2.6. 1次元トーラス  $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  の1次元複素ベクトル空間  $D := \mathbb{C}$  への標準作用を考えよう。  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  に対して、  $z$  を通る  $\mathbb{T}$ -軌道  $\mathbb{T} \cdot z$  は複素平面において原点  $0$  を中心とする半径  $|z| (> 0)$  の円である。また、原点自身  $0$  は  $\mathbb{T}$  の作用で固定される。よって、

$$\mathbb{C} = \{0\} \sqcup \bigsqcup_{r>0} \mathbb{T} \cdot r$$

と軌道分解される (図 2.1 参照)。

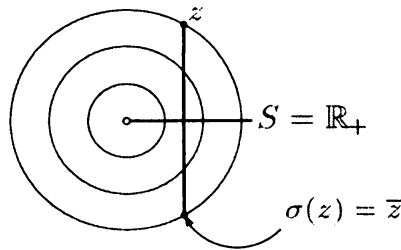


図 2.1:  $\mathbb{C}$  内の  $\mathbb{T}$ -軌道とスライス  $S$

$S := \mathbb{R}_+ = \{r > 0\}$  とし、  $\sigma(z) = \bar{z}$  ( $z \in \mathbb{C}$ ) とおく。このとき、  $\mathbb{T} \cdot \mathbb{R}_+ = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  は  $D$  の開集合である。また、明らかに  $\sigma|_S = \text{id}_S$  を満たし、  $\sigma$  が各  $\mathbb{T}$ -軌道を保存することは、  $\sigma$  が複素平面において実軸に関する対称性を表すことから分かる。以上より、この作用は強可視的である。

例 2.7. 次に、作用が線型ではない例を紹介しよう。

$\mathcal{H}_+ := \{z = x + \sqrt{-1}y : x \in \mathbb{R}, y > 0\}$  を複素上半平面とする。2次の特殊直交群  $G := SL(2, \mathbb{R}) = \{g \in GL(2, \mathbb{R}) : \det g = 1\}$  は  $\mathcal{H}_+$  に一次分数変換として作用する：

$$g \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}, \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}). \quad (2.1)$$

$SL(2, \mathbb{R})$  は複素リー群ではないが、この作用は正則であることに注意する。  $G$  は  $\mathcal{H}_+$  に推移的に作用し、特に  $S := \{\sqrt{-1}\}$ 、  $\sigma(z) = -\bar{z}$  ( $z \in \mathcal{H}_+$ ) によって強可視的である。

この作用を、  $SL(2, \mathbb{R})$  の部分群である特殊直交群  $K := SO(2) = \{g \in SL(2, \mathbb{R}) : {}^t g g = I_2\}$  に制限したものを考えよう<sup>7</sup>。  $SO(2)$  の任意の元  $g$  は  $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  を用

<sup>7</sup> $SO(2)$  は  $SL(2, \mathbb{R})$  の極大コンパクト部分群である。

いて

$$g \equiv g(\theta) := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

と表される。つまり、 $SO(2) = \{g(\theta) : \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}$ 。  $z \in \mathcal{H}_+$  が  $z \neq \sqrt{-1}$  ならば、 $z$  を通る  $K$ -軌道  $K \cdot z$  は複素平面において虚軸の正方向に中心をもつ円となることが分かる。また、 $\sqrt{-1}$  自身は  $K$  の作用で固定される。よって、 $\mathcal{H}_+$  は以下のよう  
に  $K$ -軌道分解される (図 2.2 参照) :

$$\mathcal{H}_+ = \{\sqrt{-1}\} \sqcup \bigsqcup_{0 < r < 1} K \cdot \sqrt{-1}r$$

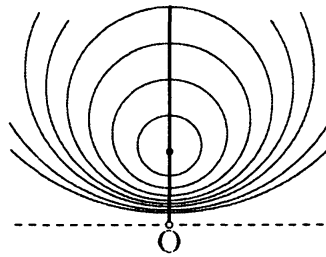


図 2.2:  $\mathcal{H}_+$  内の  $K$ -軌道

$S := \{\sqrt{-1}r : 0 < r < 1\}$  とし、 $\sigma(z) = -\bar{z}$  ( $z \in \mathcal{H}_+$ ) とすると、 $K \cdot S = \mathcal{H}_+ \setminus \{\sqrt{-1}\}$  は  $\mathcal{H}_+$  の開集合、 $\sigma|_S = \text{id}_S$  を満たし、 $\sigma$  が虚軸に関する対称性を表す写像であることから各  $K$ -軌道を保存することも分かる。

複素上半平面  $\mathcal{H}_+$  はポアンカレ円板  $D_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  と  $SL(2, \mathbb{R})$  が正則に作用する複素多様体として同型である<sup>8</sup>。ポアンカレ円板における  $SL(2, \mathbb{R})$  の作用に関する解説は [9, Example 5.4.1] や [10, Example 2.3] にある。

**注意 2.8.**  $SL(2, \mathbb{R})$  は複素上半平面  $\mathcal{H}_+$  (あるいはポアンカレ円板  $D_1$ ) に推移的に作用するので、これらは  $G/K = SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$  と複素多様体として同型である。  $G/K$  はエルミート対称空間である。  $A := \{\text{diag}(a, a^{-1}) : a > 0\}$  とすると、 $\mathcal{H}_+$  の実部分多様体  $\sqrt{-1}\mathbb{R}_+$  は  $G/K$  の部分多様体  $AK/K$  と同型である。例 2.7 によって、 $G/K$  は

$$G/K = K \cdot (AK/K)$$

と分解されることが分かる。これは、 $G$  のカルタン分解  $G = KAK$  を (複素) 多様体  $G/K$  の軌道分解の観点から解釈したことになる。

<sup>8</sup> $SL(2, \mathbb{R})$  は  $D_1$  に (2.1) によって作用する。

**注意 2.9.** スライス  $S$  の取り方は一意的ではない. 例えば,  $SL(n, \mathbb{C})$  の  $\mathbb{C}^n$  における標準的な作用を考える ( $n \geq 2$ ).  $S_0 := \{\bar{e}_1\}$ ,  $\sigma(v) = \bar{v}$  ( $v \in \mathbb{C}^n$ ) によって, この作用は強可視的である. ただし,  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$  は  $\mathbb{C}^n$  の標準基底である. 一方で,  $\sigma$  による固定点集合  $S_n = \mathbb{R}^n$  もこの作用のスライスになる.  $\dim S_0 = 0$ ,  $\dim S_n = n$  である.

(強) 可視的作用は, エルミート対称空間, (一般化された) 旗多様体など様々な設定において研究されている (cf. [9, 12, 13]). また, 最近の結果 [19] もある.

(強) 可視的作用は, 無重複性の伝播定理において重要な役割を果たす ([9, 11]). 無重複性の伝播定理は, 強可視的作用をもつ底空間  $D$  上の  $G$ -同変な正則エルミートベクトル束  $\mathcal{V}$  に対し, スライスの各点  $x \in S$  におけるファイバー  $\mathcal{V}_x$  のユニタリ表現の無重複が正則な切断全体  $\mathcal{O}(D, \mathcal{V})$  上の表現に伝播するという定理である. 特に,  $\mathcal{V}$  が自明直線束  $D \times \mathbb{C}$  のとき,  $\mathcal{O}(D, \mathcal{V})$  は自然に  $D$  上の正則関数全体  $\mathcal{O}(D)$  と同一視され,  $\mathcal{O}(D)$  上の  $G$  の連続表現に関して, 次が成り立つ.

**事実 2.10** ([9, 11]).  $G$  の  $D$  への正則な作用が強可視的であるとき,  $\mathcal{O}(D)$  は  $G$  の表現として無重複である.

### 3 主定理

この章では, 本講究録の主定理について述べる.

$V$  を (有限次元) 複素ベクトル空間として,  $G_{\mathbb{C}}$  を連結な複素簡約リー群とする.  $V$  上に  $G_{\mathbb{C}}$  の正則表現  $\varpi : G_{\mathbb{C}} \rightarrow GL_{\mathbb{C}}(V)$  を与える.

複素簡約リー群  $G_{\mathbb{C}}$  の極大コンパクト部分群  $G_u$  をとる. このとき, 次が成り立つ.

**定理 3.1** ([16, 18]). 次の2条件は同値である.

- (i)  $(G_{\mathbb{C}}, V)$  は無重複空間である.
- (ii)  $G_u$  の  $V$  における作用は強可視的である.

**注意 3.2.** 定理 3.1 の (ii) は, 極大コンパクト部分群  $G_u$  の取り方によらない.

定理 3.1 は, 無重複空間と強可視的作用という異なる概念が同値であることを示しており, よって,  $G_u$  の  $V$  への作用が強可視的であるような  $G_{\mathbb{C}}$  と  $V$  の組の分類は, 無重複空間の分類に一致するも分かる.

定理 3.1 の (ii)  $\Rightarrow$  (i) は, 無重複性の伝播定理の特別な場合である.

定理 3.1 の (i)  $\Rightarrow$  (ii) の証明を与える際に, (V.1)–(S.2) を満たす  $S$  と  $\sigma$  の存在を示す必要がある. この  $S$  と無重複表現の既約分解における各既約表現には次の関係があることが示される.

定理 3.3 ([16, 18]).  $(G_{\mathbb{C}}, V)$  が無重複空間であるとき,  $G_{\mathbb{U}}$  の  $V$  への強可視的作用において (定理 3.1 参照), スライス  $S$  と  $V$  上の反正則微分同相  $\sigma$  は次を満たすように選ぶことができる:

- (a) スライス  $S$  の実次元は無重複空間  $(G_{\mathbb{C}}, V)$  の階数と一致する.
- (b)  $\sigma$  は対合的である. つまり,  $\sigma \circ \sigma = \text{id}$ .

注意 3.4.  $G_{\mathbb{C}}$  の  $V$  への作用が可約なときは, 定理 3.3 を満たすスライス  $S$  は特にベクトル空間を選ぶことができる ([18, Theorem 1.2]). 一方で, 既約なときはベクトル空間が選べるとは限らない<sup>9</sup>.

注意 3.5. 定理 3.3 の (a) は, 予想 [10, Conjecture 3.2] に対して, 線型な作用の場合に肯定的な結論を与えている.

最後に, 定理 3.1 および 3.3 の証明についてその方針を簡潔に紹介する. 以下に述べるように, 証明は case-by-case 議論を用い分量が多いため, ここでは省略する. 詳細については論文 [16, 18] を参照していただきたい.

既約な場合 論文 [16] では  $G_{\mathbb{C}}$  の  $V$  における作用が既約な場合を扱っている. Kac が分類した既約な無重複空間  $(G_{\mathbb{C}}, V)$  は 14 種類あり, これらをスライスの構成の仕方によって以下の 3 つの型に再分類し, 具体的に  $S$  と  $\sigma$  を構成する:

**Type 1** ([16, Section 3]).  $G_{\mathbb{U}}$  の作用がある非コンパクトな既約エルミート対称空間に対する等方表現として実現できる. この場合は, [9, 13, 20] の結果を用いて一般的に示される.

**Type 2** ([16, Section 4]).  $G_{\mathbb{C}}$  が  $U(m) \times Sp(n)$  と局所同型である.

**Type 3** ([16, Section 5]). コンパクトリー群と推移的に作用する単位球面との組の部分列を用いてスライスを構成する (cf. [4, 15]).

可約な場合 論文 [18] では  $G_{\mathbb{C}}$  の  $V$  における作用が可約な場合を扱っている. Benson–Ratcliff と Leahy が分類した可約な無重複空間は,  $(H_{\mathbb{C}}, V)$  が 12 種類ある.

まず,  $G_{\mathbb{C}}$  の正則表現  $(\tau, V)$  と  $L_{\mathbb{C}}$  の正則表現  $(\rho, V)$  に対して,  $\tau = \rho \circ \varphi$  を満たす連続な単射準同型  $\varphi: G_{\mathbb{C}} \rightarrow L_{\mathbb{C}}$  が存在するとき,  $G_{\mathbb{C}} \prec L_{\mathbb{C}}$  と表すことにする. この関係  $\prec$  は無重複空間の上で半順序を定める. 定理 3.1 と 3.3 はこれに関して ‘極小’ なもののみを考えれば十分であることが示される ([18, Lemma 2.3, Definition 2.4]). このことは, 多項式環上の表現において, 小さい群において無重複ならば, 大きい群においても無重複であることに対応する. 極小な無重複空間  $(G_{\mathbb{C}}, V)$  は ( $G_{\mathbb{C}}$  の中心の次元および作用の仕方も込めて) 22 種類存在する [18, Table 2.3].

<sup>9</sup>無重複空間  $(U(3) \times Sp(n), \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^{2n})$  ( $n \geq 2$ ) はその例である [16, Lemmas 4.1, 4.2].

次に、各々の極小な無重複空間  $(G_{\mathbb{C}}, V)$  に対して、スライス  $S$  と反正則微分同相  $\sigma$  を構成する。21 種類は  $V = \mathbb{C}\bar{e}_1 + \cdots + \mathbb{C}\bar{e}_N$  の実型  $V_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\bar{e}_1 + \cdots + \mathbb{R}\bar{e}_N$  の部分空間としてスライスを選ぶことができる。ただし、 $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_N$  は  $V$  の標準基底を表す ( $\dim V = N$ )<sup>10</sup>。残りの 1 種類は既約な場合の Type 3 の手法を用いてスライスを構成する<sup>11</sup>。

## 参考文献

- [1] C. Benson and G. Ratcliff, A classification of multiplicity free actions, *J. Algebra* **181** (1996), 152–186.
- [2] C. Benson and G. Ratcliff, Rationality of the generalized binomial coefficients for a multiplicity free action, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **68** (2000), 387–410.
- [3] C. Benson and G. Ratcliff, On multiplicity-free actions, *Representations of real and  $p$ -adic groups* (eds. E.-C. Tan and C.-B. Zhu), Lect. Notes Ser. Inst. Math. Sci. Natl. Univ. Singap. **2**, Singapore Univ. Press, Singapore (2004) 221–304.
- [4] A. Borel, Le plan projectif des octaves et les sphères comme espaces homogènes, *C. R. Acad. Sci. Paris* **230** (1950), 1378–1380
- [5] R. Howe and T. Umeda, The Capelli identity, the double commutant theorem, and multiplicity-free actions, *Math. Ann.* **290** (1991), 565–619.
- [6] V. Kac, Some remarks on nilpotent orbits, *J. Algebra* **64** (1980), 190–213.
- [7] F. Knop, Some remarks on multiplicity-free spaces, *Representation Theories and Algebraic Geometry*, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. **514** (1998), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 301–317.
- [8] T. Kobayashi, Geometry of multiplicity-free representations of  $GL(n)$ , visible actions on flag varieties, and triunity, *Acta. Appl. Math.* **81** (2004), 129–146.
- [9] T. Kobayashi, Multiplicity-free representations and visible actions on complex manifolds, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **41** (2005), 497–549, special issue commemorating the fortieth anniversary of the founding of RIMS.

<sup>10</sup>半単純部分  $H_{\mathbb{C}}$  は A 型, C 型の古典群で構成される。

<sup>11</sup> $(G_{\mathbb{C}}, V) = (\text{Spin}(8, \mathbb{C}) \times (\mathbb{C}^{\times})^2, \mathbb{C}^8 \oplus \mathbb{C}^8)$ . このとき,  $(\mathbb{R}\bar{e}_1 + \sqrt{-1}(\mathbb{R}\bar{e}_2)) \oplus (\mathbb{R}\bar{e}_1 + \sqrt{-1}(\mathbb{R}\bar{e}_2 + \mathbb{R}\bar{e}_3))$  をスライスとして選ぶことができる [18, Proposition 4.7].



- [10] T. Kobayashi, Introduction to visible actions on complex manifolds and multiplicity-free representations, *Surikaiseki Kokyuroku* **1502** (2006), 82–95, Res. Inst. Math. Sci., Developments of Cartan Geometry and Related Mathematical Problems (ed. T. Morimoto).
- [11] T. Kobayashi, Propagation of multiplicity-free property for holomorphic vector bundles, math.RT/0607004.
- [12] T. Kobayashi, A generalized Cartan decomposition for the double coset space  $(U(n_1) \times U(n_2) \times U(n_3)) \backslash U(n) / (U(p) \times U(q))$ , *J. Math. Soc. Japan* **59** (2007), 669–691.
- [13] T. Kobayashi, Visible actions on symmetric spaces, *Transform. Groups* **12** (2007), 671–694.
- [14] A. Leahy, A classification of multiplicity free representations, *J. Lie Theory* **8** (1998), 367–391.
- [15] D. Montgomery and H. Samelson, Transformation groups of spheres, *Ann. of Math.* **44** (1943), 454–470.
- [16] A. Sasaki, Visible actions on irreducible multiplicity-free spaces, *Int. Math. Res. Not.* (2009) 3445–3466, doi: 10.1093/imrn/rnp060.
- [17] A. Sasaki, Linear visible actions, *accepted for publication in RIMS Kôkyûroku Bessatsu*.
- [18] A. Sasaki, Visible actions on reducible multiplicity-free spaces, *submitted*.
- [19] A. Sasaki, A characterization of non-tube type Hermitian symmetric spaces by visible actions, *Geom. Dedicata* (2009), doi: 10.1007/s10711-009-9412-z.
- [20] W. Schmid, Die Randwerte holomorpher Funktionen auf hermiteschen symmetrischen Räumen, *Invent. Math.* **9** (1969), 61–80.

Atsumu SASAKI

Department of Mathematics  
 Faculty of Science and Engineering  
 Waseda University  
 3-4-1, Okubo, Shinjuku-ku, Tokyo  
 169-8555, Japan  
 E-mail: atsumu@aoni.waseda.jp