数理解析研究所講究録
第 1690 巻 2010 年 39-49

Symmetry of the linearized Boltzmann equation

京都大学・工学研究科・機械理工学専攻　髙田　滋 (Shigeru Takata)
Department of Mechanical Engineering and Science,
Kyoto University

Dedicated to Professor Kenji Nishihara for his 60th birthday

1　はじめに

筆者は，最近，2 つの独立な線形化 Boltzmann 方程式の定常境界値問題の解の間で一般的に成り立つ対称関係があることを示し，これを用いて種々の物理系の間にみられる交差関係を適切に説明，予測できることを明らかにした [1]．さらにいわゆる Onsager–Casimir の相反性を任意の希薄度領域で論じ，これが成り立つ物理的状況を明らかにした [2]．

研究集会では文献 [1] に沿って研究内容を報告したが，本稿では，ひとつの例題を取り上げ，文献 [1] の議論がどのように適用されるかをより具体的に示したい．ここで考えるのは，熱泳動と呼ばれる現象と遅い一様流の間の交差関係である [3]．我々の理論で導かれる具体的な交差関係の公式（相反関係）が，既往研究で得られたデータを使って数値的に検証出来ることも示す．なお，本稿では参考文献を絞り込んでいるので，周辺事情に興味がある場合は文献 [1, 2, 3] にあげた参考文献を参照いただきたい．

2　問題

2.1　対象にする物理的問題と仮定

まず対象にする 2 つの問題を述べる．

熱泳動の問題（以下，問題 I とよぶ）：無限領域を占める気体中に表面温度が一様一定の温度 T_0 に保たれた半径 L の球が置かれている．X_i を球の中心を原点とする空間直交座標とし，気体は（球がなければ）一様圧力 p_0，温度 $T_0(1+c_\mathrm{T}X_1/L)$ で静止しているものとする．ここで $c_\mathrm{T}(>0)$ は無次元の定数である．このとき球のまわりの気体の定常な振舞いと球に働く力（熱流力）を調べる．

一様流の問題（以下，問題 II とよぶ）：問題 I と同じ球が無限領域を占める圧力 p_0，温度 T_0，流速 $(U_0,0,0)$ の一様気流中におかれているとき，球のまわりの気体の定常な振舞いと球に働く力（抗力）を調べる．

上の 2 つの問題を次の仮定のもとで調べる：

1. 気体の振舞いは単原子分子気体に対する Boltzmann 方程式あるいはそのモデル方程式で記述できる.

2. 球の表面は単純壁で，壁に入射した分子は後で詳述する散乱則にしたがって散乱される.

3. $|c_\mathrm{T}| \ll 1$，$|U_0/(2kT_0/m)^{1/2}| \ll 1$ であり，問題は圧力 p_0，温度 T_0 の静止平衡状態のまわりで線形化できる．ここで k は Boltzmann 定数，m は分子の質量である．以下ではこの静止平衡状態を基準状態とよぶ.

空間座標 X_i を $L\,x_i$，分子速度を $(2kT_0/m)^{1/2}\,\zeta_i$，問題 I，II における速度分布関数をそれぞれ $\rho_0(2kT_0/m)^{-3/2}(1+c_\mathrm{T}\phi^\mathrm{I})E(\boldsymbol{\zeta})$，$\rho_0(2kT_0/m)^{-3/2}(1+u_0\phi^\mathrm{II})E(\boldsymbol{\zeta})$ とする．ここで $\rho_0 = p_0/(k/m)T_0$，$u_0 = U_0/(2kT_0/m)^{1/2}$，$E(\boldsymbol{\zeta}) = \pi^{-3/2}\exp(-|\boldsymbol{\zeta}|^2)$ である．基準状態における気体分子の平均自由行程を ℓ_0 とし，Knudsen 数 $\mathrm{Kn} = \ell_0/L$ を導入すると，上の 2 つの問題は次のように定式化できる：

問題 I（熱泳動）：

$$\zeta_i \frac{\partial \phi^\mathrm{I}}{\partial x_i} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\mathrm{Kn}}\mathcal{L}(\phi^\mathrm{I}), \tag{1a}$$

$$\phi^\mathrm{I} = \int_{\zeta_n^*<0} \frac{|\zeta_n^*|E^*}{|\zeta_n|E} R(\boldsymbol{\zeta}^*, \boldsymbol{\zeta}; \boldsymbol{x})\phi^{\mathrm{I}*}\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}^* \qquad \text{for } \zeta_n > 0,\ |\boldsymbol{x}| = 1, \tag{1b}$$

$$\phi^\mathrm{I} \to h^\mathrm{I} \equiv (|\boldsymbol{\zeta}|^2 - \frac{5}{2})x_1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{Kn}\,\zeta_1 A(|\boldsymbol{\zeta}|) \qquad \text{as } |\boldsymbol{x}| \to \infty. \tag{1c}$$

問題 II（一様流）：

$$\zeta_i \frac{\partial \phi^\mathrm{II}}{\partial x_i} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\mathrm{Kn}}\mathcal{L}(\phi^\mathrm{II}), \tag{2a}$$

$$\phi^\mathrm{II} = \int_{\zeta_n^*<0} \frac{|\zeta_n^*|E^*}{|\zeta_n|E} R(\boldsymbol{\zeta}^*, \boldsymbol{\zeta}; \boldsymbol{x})\phi^{\mathrm{II}*}\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}^* \qquad \text{for } \zeta_n > 0,\ |\boldsymbol{x}| = 1, \tag{2b}$$

$$\phi^\mathrm{II} \to h^\mathrm{II} \equiv 2\zeta_1 \quad \text{as } |\boldsymbol{x}| \to \infty. \tag{2c}$$

ここで $\zeta_n = \zeta_i n_i$，n_i は位置 $\boldsymbol{x}$ における球表面の（気体側向き）単位法線ベクトル，$\mathcal{L}$ は線形化衝突積分作用素，R は基準状態における球表面の散乱核を表す．また，$A(|\boldsymbol{\zeta}|)$ は次の方程式の解である：

$$\mathcal{L}(\zeta_i A) = -\zeta_i(|\boldsymbol{\zeta}|^2 - \frac{5}{2}) \qquad \text{付帯条件：} \int_0^\infty z^4 A(z)\exp(-z^2)\mathrm{d}z = 0.$$

$\mathcal{L}$，R は付録 A にまとめた性質を満たすものとし，具体形はここで与えない．以下の議論における制約は両者が 2 つの問題に共通でなければならないことである.

2.2　2つの問題の間の関係

文献 [1] では質量，運動量，熱流束の一般表現を与え，これを「表現定理」とよんだ.「表現定理」は物理的状況に応じていくつかの型をもつが，いまの問題では命題 7（例題 3）に示した運動量に対する表現が興味深い関係を与える．ここでは文献 [1] に示した公式を用いる代わりに,「表現定理」の導出のもとになった対称関係式 (14) から，直接，熱泳動（問題 I）と一様流（問題 II）との関係を導いてみる.

文献 [1] の対称関係式 (14) を ϕ^{I} と ϕ^{II} の組に用いると，

$$\lim_{r\to\infty}\int_{|\boldsymbol{x}|=r}\langle\zeta_n h^{\mathrm{II}}(\boldsymbol{x},-\boldsymbol{\zeta})[\phi^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\zeta})-\frac{1}{2}h^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\zeta})]\rangle\mathrm{dS}$$
$$=\lim_{r\to\infty}\int_{|\boldsymbol{x}|=r}\langle\zeta_n h^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{x},-\boldsymbol{\zeta})[\phi^{\mathrm{II}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\zeta})-\frac{1}{2}h^{\mathrm{II}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\zeta})]\rangle\mathrm{dS},\quad(3)$$

となる．ここで dS は $\boldsymbol{x}$ における面要素，$\langle\ \rangle$ は

$$\langle f\rangle=\int fE(\boldsymbol{\zeta})\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}\quad(4)$$

である．問題 I に関する量と問題 II に関する量の役割が等式の両辺で対称的なことが「対称関係式」と呼ぶ理由である.

さて，h^{I}，h^{II} の具体形を代入すれば，(3) は

$$-\lim_{r\to\infty}\int_{|\boldsymbol{x}|=r}\langle 2\zeta_1\zeta_n\phi^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\zeta})\rangle\mathrm{dS}$$
$$=\lim_{r\to\infty}\int_{|\boldsymbol{x}|=r}\Big(x_1Q_n^{\mathrm{II}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\zeta})+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{Kn}\langle\zeta_1\zeta_nA(\boldsymbol{\zeta})\phi^{\mathrm{II}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\zeta})\rangle\Big)\mathrm{dS},\quad(5)$$

となる．ここで $Q_n^{\mathrm{II}}=Q_i^{\mathrm{II}}n_i=\langle\zeta_i(|\boldsymbol{\zeta}|^2-\frac{5}{2})\phi^{\mathrm{II}}\rangle n_i$ であり，$p_0(2kT_0/m)^{3/2}u_0Q_i^{\mathrm{II}}$ は問題 II における気体中の熱流ベクトルを表す．Boltzmann 方程式から導かれる運動量保存 ($\partial_i\langle\zeta_i\zeta_j\phi^{\mathrm{I}}\rangle=0$; $\partial_i=\partial/\partial x_i$) を考慮すると，上式の左辺は Gauss の発散定理を用いて $\int_{|\boldsymbol{x}|=1}\langle 2\zeta_1\zeta_n\phi^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\zeta})\rangle\mathrm{dS}$ という球上の表面積分におきかえられる．問題 I で球に働く熱流力を $p_0L^2c_{\mathrm{T}}(F^{\mathrm{I}},0,0)$ と表せば $F^{\mathrm{I}}=-\int_{|\boldsymbol{x}|=1}\langle 2\zeta_1\zeta_n\phi^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\zeta})\rangle\mathrm{dS}$ だから，結局，

$$F^{\mathrm{I}}=-\lim_{r\to\infty}\int_{|\boldsymbol{x}|=r}\Big(x_1Q_n^{\mathrm{II}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\zeta})+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{Kn}\langle\zeta_1\zeta_nA(\boldsymbol{\zeta})\phi^{\mathrm{II}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\zeta})\rangle\Big)\mathrm{dS},\quad(6)$$

が得られたことになる.

(6) は，熱的な要因によって起こる力学的な現象（背景の気体の温度勾配によって球が受ける力）が，力学的な要因によって起こる熱的な現象（一様流が球を過ぎることで誘導する熱流）と関係づけられることを示している．しかもこの関係が任意の希薄度 ($0<\mathrm{Kn}<\infty$) で成り立つことが重要である．以下ではこの関係を問題 I と II の間の相反関係とよぶことにする．過去に (6) とは矛盾する相反関係が主張され，それが 15 年来訂正されなかった事情もあるので，本稿ではこれから (6) を数値的に検証した結果を示す．検証に用いるのは軽度に希薄な気体（$\mathrm{Kn}\ll 1$）に対する漸近理論 [4, 5, 6] である.

3 漸近理論による数値的検証

3.1 定常線形系に対する漸近理論の概略

漸近理論によれば，速度分布関数，速度，圧力，温度といった物理量（f と書く）は，2 つの部分に分けられる：

$$f = f_{\mathrm{H}} + f_{\mathrm{K}}.$$

ここで f_{H} は平均自由行程よりもずっと長い尺度で変化する部分，f_{K} は固体境界に隣接する平均自由行程程度の薄層内部でのみ有意な気体論的な境界層補正である[1]．前者を Hilbert 部分あるいは Hilbert 解と，後者を Knudsen 層部分とよぶ．f_{H}，f_{K} ともに Kn 程度の微小パラメータ $\varepsilon = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{Kn}$ によって展開できる：

$$f_{\mathrm{H}} = f_{\mathrm{H0}} + f_{\mathrm{H1}}\varepsilon + f_{\mathrm{H2}}\varepsilon^2 + \cdots,$$
$$f_{\mathrm{K}} = f_{\mathrm{K1}}\varepsilon + f_{\mathrm{K2}}\varepsilon^2 + \cdots.$$

Hilbert 部分は $\boldsymbol{\zeta}$ について既定の関数形を取り，その振舞いは次の Stokes 方程式系に支配される流体力学的な量（圧力，流速，温度）によって定まる：

$$\partial_i p_{\mathrm{H0}} = 0, \tag{7a}$$
$$\partial_i u_{i\mathrm{H0}} = 0, \tag{7b}$$
$$\partial_i p_{\mathrm{H}m+1} = \gamma_1 \Delta u_{i\mathrm{H}m}, \tag{7c}$$
$$\Delta \tau_{\mathrm{H}m} = 0. \tag{7d}$$

ここで $m = 0, 1, 2, \ldots$，$\partial_i = \partial/\partial x_i$，$\Delta$ は Laplacian，$p_0(1+P)$ は圧力，$T_0(1+\tau)$ は温度，$(2RT_0)^{1/2}u_i$ は流速を表す．また γ_1 は後で定義を与える定数である．この方程式系に対する境界条件はすべり（および跳び）条件の形をとる．Stokes 系 (7) に対するすべりの境界条件を付録 B にまとめておく．一方，Knudsen 層部分は，分子模型と散乱核で決まる複数の普遍関数とより低次の近似段階における Hilbert 部分を使って表されるが，本稿の議論では Knudsen 層部分の情報は必要にならないので詳細は省略する．結局，Stokes 系 (7) を付録 B にまとめたすべりの境界条件の下で解けば，物体のごく近傍の気体論的境界層を除く領域の気体の振舞いを ε の 2 次まで正しく求めることができる．ここでは後で (6) を検討するときに必要になる ϕ_{H0}，ϕ_{H1}，ϕ_{H2} および $Q_{i\mathrm{H0}}$，$Q_{i\mathrm{H1}}$，$Q_{i\mathrm{H2}}$，$Q_{i\mathrm{H3}}$ の一般表現を示しておく：

$$\phi_{\mathrm{H0}} = P_{\mathrm{H0}} + 2\zeta_i u_{i\mathrm{H0}} + (|\boldsymbol{\zeta}|^2 - \frac{5}{2})\tau_{\mathrm{H0}}, \tag{8a}$$
$$\phi_{\mathrm{H1}} = P_{\mathrm{H1}} + 2\zeta_i u_{i\mathrm{H1}} + (|\boldsymbol{\zeta}|^2 - \frac{5}{2})\tau_{\mathrm{H1}} - \zeta_i\zeta_j B(|\boldsymbol{\zeta}|)\partial_j u_{i\mathrm{H0}} - \zeta_i A(|\boldsymbol{\zeta}|)\partial_i \tau_{\mathrm{H0}}, \tag{8b}$$
$$\begin{aligned}\phi_{\mathrm{H2}} = {} & P_{\mathrm{H2}} + 2\zeta_i u_{i\mathrm{H2}} + (|\boldsymbol{\zeta}|^2 - \frac{5}{2})\tau_{\mathrm{H2}} - \zeta_i\zeta_j B(|\boldsymbol{\zeta}|)\partial_j u_{i\mathrm{H1}} - \zeta_i A(|\boldsymbol{\zeta}|)\partial_i \tau_{\mathrm{H1}} \\ & + \gamma_1^{-1}\zeta_i D_1(|\boldsymbol{\zeta}|)\partial_i P_{\mathrm{H1}} + \zeta_i\zeta_j\zeta_k D_2(|\boldsymbol{\zeta}|)\partial_j\partial_k u_{i\mathrm{H0}} - \zeta_i\zeta_j F(|\boldsymbol{\zeta}|)\partial_i\partial_j \tau_{\mathrm{H0}}.\end{aligned} \tag{8c}$$

[1]凸境界近傍にはさらに薄い層内部でのみ有意な S 層があるが，以下の議論には影響しないので，ここでは触れない．

$$Q_{i\mathrm{H}0} = 0, \tag{9a}$$

$$Q_{i\mathrm{H}1} = -\frac{5}{4}\gamma_2 \partial_i \tau_{\mathrm{H}0}, \tag{9b}$$

$$Q_{i\mathrm{H}2} = -\frac{5}{4}\gamma_2 \partial_i \tau_{\mathrm{H}1} + \frac{\gamma_3}{2}\Delta u_{i\mathrm{H}0}, \tag{9c}$$

$$Q_{i\mathrm{H}3} = -\frac{5}{4}\gamma_2 \partial_i \tau_{\mathrm{H}2} + \frac{\gamma_3}{2}\Delta u_{i\mathrm{H}1}. \tag{9d}$$

ここで B，D_1，D_2，F はそれぞれ次の方程式の解である：

$$\mathcal{L}\Big(\zeta_{ij}B(|\boldsymbol{\zeta}|)\Big) = -2\zeta_{ij}, \quad \mathcal{L}\Big(\zeta_{ij}F(|\boldsymbol{\zeta}|)\Big) = \zeta_{ij}A(|\boldsymbol{\zeta}|),$$

$$\mathcal{L}\Big(\zeta_{ijk}D_1(|\boldsymbol{\zeta}|) + \zeta_i\zeta_j\zeta_k D_2(\boldsymbol{\zeta}|)\Big) = \gamma_1\zeta_{ijk} - \zeta_i\zeta_j\zeta_k B(|\boldsymbol{\zeta}|),$$

$$\text{付帯条件：} \quad \int_0^\infty \Big(5z^4 D_1(z) + z^6 D_2(z)\Big)\exp(-z^2)\mathrm{d}z = 0.$$

ただし

$$\zeta_{ij} = \zeta_i\zeta_j - \frac{1}{3}|\boldsymbol{\zeta}|^2\delta_{ij}, \quad \zeta_{ijk} = \zeta_i\delta_{jk} + \zeta_j\delta_{ki} + \zeta_k\delta_{ij}$$

と略記した．γ_1，γ_2，γ_3 は次式で定義される定数である：

$$\gamma_1 = I_6(B), \quad \gamma_2 = 2I_6(A), \quad \gamma_3 = I_6(AB) = 5I_6(D_1) + I_8(D_2) = -2I_6(F).$$

ここで $I_n(Z) = \frac{8}{15\sqrt{\pi}}\int_0^\infty z^n Z(z)\exp(-z^2)\mathrm{d}z$ である．$\gamma_1 \sim \gamma_3$ の値は分子間力模型によって決まる．例えば，BKW 方程式 [7, 8] では $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1$，剛体球分子模型では $\gamma_1 = 1.270042$，$\gamma_2 = 1.933384$，$\gamma_3 = 1.947906$ である．

3.2 漸近理論の適用

3.2.1 問題 I（熱泳動）への適用の結果

軽度に希薄な気体における球の熱泳動の問題は漸近理論をもとにすでに詳細に調べられている [9, 10, 11, 12]．それによれば，一様温度に保たれた球に働く熱流力は，熱応力に起因する球表面でのすべり流（熱応力すべり流）を誘起する反作用として生まれ，F^{I} は

$$F^{\mathrm{I}} = 12\pi\gamma_1 a_4 \varepsilon^3 + o(\varepsilon^3), \tag{10}$$

で与えられる．ここで a_4 は付録 B に示したすべり係数の 1 つである．

3.2.2 問題 II（一様流）への適用の結果

球を過ぎる軽度に希薄な気体の遅い一様流の問題は，文献 [10, 13] で詳しく調べられている．それによると，$u^{\mathrm{II}}_{i\mathrm{H}0}$，$u^{\mathrm{II}}_{i\mathrm{H}1}$，$\tau^{\mathrm{II}}_{\mathrm{H}0}$，$\tau^{\mathrm{II}}_{\mathrm{H}1}$，$\tau^{\mathrm{II}}_{\mathrm{H}2}$ は次のように表される[2]：

$$\tau^{\mathrm{II}}_{\mathrm{H}0} = 0, \quad \tau^{\mathrm{II}}_{\mathrm{H}1} = 0, \quad \tau^{\mathrm{II}}_{\mathrm{H}2} = 6d_4 r^{-2}\cos\theta, \tag{11a}$$

[2] 文献 [13] では，BKW 方程式の場合に特有の関係 $d_4^* = -4d_4$ に基いて，d_4 の代わりに d_4^* を用いて温度場を表している．この関係は一般に成り立つわけではないので注意が必要である．

$$u^{\rm II}_{r{\rm H}0} = (1 - \frac{3}{2}r^{-1} + \frac{1}{2}r^{-3})\cos\theta, \quad u^{\rm II}_{\theta{\rm H}0} = -(1 - \frac{3}{4}r^{-1} - \frac{1}{4}r^{-3})\sin\theta, \quad u^{\rm II}_{\varphi{\rm H}0} = 0, \tag{11b}$$

$$u^{\rm II}_{r{\rm H}1} = -\frac{3}{2}k_0(r^{-1} - r^{-3})\cos\theta, \quad u^{\rm II}_{\theta{\rm H}1} = \frac{3}{4}k_0(r^{-1} + r^{-3})\sin\theta, \quad u^{\rm II}_{\varphi{\rm H}1} = 0. \tag{11c}$$

ここで x_1 軸を天頂方向とする球座標表示 (r,θ,φ) を導入した．θ は天頂角，φ は方位角である．また，d_4，k_0 は付録にまとめたすべり係数である．一様流は線形化が許されるほど遅く，しかも球の温度は一様流の上流温度と一致しているのにもかかわらず，一様でない温度場が気体中に形成されることがわかる．この現象は気体の熱分極 [14] とよばれている．

さて，$A(|\boldsymbol{\zeta}|)$ の性質に注意すると，Hilbert 解の一般形 (8) から $\langle\zeta_i\zeta_1 A\,\phi_{\rm H0}\rangle$，$\langle\zeta_i\zeta_1 A\,\phi_{\rm H1}\rangle$，$\langle\zeta_i\zeta_1 A\,\phi_{\rm H2}\rangle$ はそれぞれ

$$\langle\zeta_i\zeta_1 A\,\phi_{\rm H0}\rangle = \frac{5}{4}\gamma_2\tau_{\rm H0}\delta_{i1}, \tag{12a}$$

$$\langle\zeta_i\zeta_1 A\,\phi_{\rm H1}\rangle = \frac{5}{4}\gamma_2\tau_{\rm H1}\delta_{i1} - \frac{1}{2}\gamma_3(\partial_1 u_{i{\rm H}0} + \partial_i u_{1{\rm H}0}), \tag{12b}$$

$$\langle\zeta_i\zeta_1 A\,\phi_{\rm H2}\rangle = \frac{5}{4}\gamma_2\tau_{\rm H2}\delta_{i1} - \frac{1}{2}\gamma_3(\partial_1 u_{i{\rm H}1} + \partial_i u_{1{\rm H}1}) + \frac{1}{2}\gamma_3\partial_1\partial_i\tau_{\rm H0}, \tag{12c}$$

となるので，(9) を考慮すると，相反関係 (6) の右辺は (11) に示した問題 II の Hilbert 解に対する 1 次までの流速と 2 次までの温度によって ε の 3 次までの精度で求められる見通しが立つ．Hilbert 解だけで話が済むのは，Knudsen 層部分が球の近傍でしか有意でなく，遠方ではすでに消滅してしまっているからである．

そこで (11) を (12) および (9) に代入して $|\boldsymbol{x}| = r$ の球面上における $\langle\zeta_n\zeta_1 A\,\phi^{\rm II}_{{\rm H}m}\rangle$ （$m = 0,1,2$）および $Q^{\rm II}_{n{\rm H}m}$ （$m = 0,1,2,3$）を計算した結果を示しておく：

$$\left.\langle\zeta_n\zeta_1 A\,\phi^{\rm II}_{\rm H0}\rangle\right|_{|\boldsymbol{x}|=r} = 0, \tag{13a}$$

$$\left.\langle\zeta_n\zeta_1 A\phi^{\rm II}_{\rm H1}\rangle\right|_{|\boldsymbol{x}|=r} = \frac{3}{2}\gamma_3\frac{\cos^2\theta}{r^2} + O(r^{-4}), \tag{13b}$$

$$\left.\langle\zeta_n\zeta_1 A\,\phi^{\rm II}_{\rm H2}\rangle\right|_{|\boldsymbol{x}|=r} = \frac{3}{2}\gamma_3 k_0\Big(1 - 5\frac{\gamma_2}{\gamma_3}\frac{d_4}{k_0}\Big)\frac{\cos^2\theta}{r^2} + O(r^{-4}). \tag{13c}$$

$$\left.Q^{\rm II}_{n{\rm H}0}\right|_{|\boldsymbol{x}|=r} = 0, \quad \left.Q^{\rm II}_{n{\rm H}1}\right|_{|\boldsymbol{x}|=r} = 0, \tag{14a}$$

$$\left.Q^{\rm II}_{n{\rm H}2}\right|_{|\boldsymbol{x}|=r} = -\frac{3}{2}\gamma_3 r^{-3}\cos\theta, \tag{14b}$$

$$\left.Q^{\rm II}_{n{\rm H}3}\right|_{|\boldsymbol{x}|=r} = -\frac{3}{2}\gamma_3(k_0 + 10\frac{\gamma_2}{\gamma_3}d_4)r^{-3}\cos\theta. \tag{14c}$$

3.2.3 相反関係への適用

3.2.2節の計算によって (6) の右辺を具体的に計算する準備が整った．遠方場ではKnudsen層補正が消滅し，解がHilbert解だけで表現できることに注意すると，

$$
\begin{aligned}
-\lim_{r\to\infty}\int_{|\boldsymbol{x}|=r} x_1 Q_n^{\mathrm{II}}(\boldsymbol{x})\mathrm{dS} &= -\lim_{r\to\infty}\int_{|\boldsymbol{x}|=r} x_1 Q_{n\mathrm{H}}^{\mathrm{II}}\mathrm{dS} \\
&= -\lim_{r\to\infty}\int_{|\boldsymbol{x}|=r} x_1 [Q_{n\mathrm{H2}}^{\mathrm{II}} + Q_{n\mathrm{H3}}^{\mathrm{II}}\varepsilon]\varepsilon^2\mathrm{dS} + o(\varepsilon^3) \\
&= 2\pi\gamma_3\Big[1 + \Big(k_0 + 10\frac{\gamma_2}{\gamma_3}d_4\Big)\varepsilon\Big]\varepsilon^2 + o(\varepsilon^3),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\lim_{r\to\infty}\int_{|\boldsymbol{x}|=r} \varepsilon\langle\zeta_n\zeta_1 A(|\boldsymbol{\zeta}|)\phi^{\mathrm{II}}\rangle\mathrm{dS} &= -\lim_{r\to\infty}\int_{|\boldsymbol{x}|=r} \varepsilon\langle\zeta_n\zeta_1 A(|\boldsymbol{\zeta}|)\phi_{\mathrm{H}}^{\mathrm{II}}\rangle\mathrm{dS} \\
&= -2\pi\gamma_3\Big[1 + k_0\Big(1 - 5\frac{\gamma_2}{\gamma_3}\frac{d_4}{k_0}\Big)\varepsilon\Big]\varepsilon^2 + o(\varepsilon^3),
\end{aligned}
$$

を得る．したがって相反関係 (6) は

$$
F^{\mathrm{I}} = 30\pi\gamma_2 d_4\varepsilon^3 + o(\varepsilon^3), \tag{15}
$$

を与えることが導かれた．

4 相反関係の数値的検証

ここまでの結果をまとめると，漸近理論を問題Iに直接適用した結果，まず熱流力 F^{I} の具体的表現 (10) が得られた．つぎに，漸近理論を問題IIに直接適用した結果を相反関係 (6) に適用した結果，熱流力 F^{I} の別の表現 (15) が得られた．

式 (10) と (15) の右辺はどちらも F^{I} を表すから両者は一致しなければならない．逆にいえば，両者が本当に一致するかを数値的に調べることは相反関係 (6) の良い検証になる．そこで (10) と (15) とから導かれるすべり係数 a_4 と d_4 との間の関係

$$
a_4 = \frac{5}{2}\frac{\gamma_2}{\gamma_1}d_4 \tag{16}
$$

の正否を数値的に確認する．幸い，この確認のために新しい数値計算を行う必要はない．文献 [4, 6] によると，球表面の境界条件が拡散反射条件で気体の振舞いが（線形化）BKW方程式に従う場合，すべり係数 a_4 と d_4 の値は

$$
a_4 = 0.27922, \quad d_4 = 0.11169
$$

である．BKW 方程式では $\gamma_1 = 1$，$\gamma_2 = 1$ なので，これらの値を代入すれば (16) の関係が満たされていることが確認できる．

ところで本来の Boltzmann 方程式の場合，剛体球分子模型については a_4 の数値が報告されている [12] が，d_4 の値の報告事例はない．そこで (16) の関係をもとに，この場合

α	0.5	0.75	1
a_4	0.1547	0.0700	0.0330
d_4	0.04088	0.0185	0.00872

表 1: Maxwell 型境界における a_4 と (16) から算出した d_4（剛体球分子）.

の d_4 の値を新しく求めてみる．このように，相反関係は，新たに数値計算をすることなく，物理的に重要な量を求めることに利用できる点で有用である．剛体球分子模型の場合，$\gamma_1 = 1.270042$，$\gamma_2 = 1.933384$ であることに注意すると，[12] で求められているすべり係数 a_4 の値から表 1 に示す数値が得られる．これらの数値は Maxwell 型の境界条件に対して求められたもので，α は適応係数である（$\alpha = 0$ は鏡面反射，$\alpha = 1$ は拡散反射境界条件に当たる）．

表 1 で求められた d_4 の値は，対応する BKW 方程式の場合の値に比べてほぼ 1 桁小さい（$\alpha = 1$ の拡散反射では $d_4 = 0.11169$）．このことは，BKW 方程式を用いると，軽度に希薄な気体で起こる熱分極が本来の Boltzmann 方程式を用いる場合よりも一桁過大に予測されてしまうことを示している．このことは直接差分法による詳細な数値計算の結果と符合する [15].

A　線形化衝突作用素 $\mathcal{L}$ と散乱核 R の性質

本稿の議論では，線形化衝突作用素 $\mathcal{L}$ が次にあげる諸性質をもつことを前提とする：

(i) $\mathcal{L}$ は $\boldsymbol{\zeta}$ に作用するパリティ作用素と可換である：

$$\mathcal{L}(\Phi)^- = \mathcal{L}(\Phi^-) \quad \text{for any } \Phi.$$

ここで $\Psi^-(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\zeta}) \equiv \Psi(\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{\zeta})$.

(ii) $\mathcal{L}$ は自己随伴である：

$$\langle \Phi \mathcal{L}(\Psi) \rangle = \langle \Psi \mathcal{L}(\Phi) \rangle \quad \text{for any } \Phi \text{ and } \Psi.$$

ここで $\langle\ \rangle$ は括弧内の量のモーメントを表す［(4) 参照］.

(iii) $\mathcal{L}(\Phi) = 0$ は Φ が $1, \boldsymbol{\zeta}$, および $|\boldsymbol{\zeta}|^2$ の線形和のとき，またその時に限って成り立つ.

(iv) $\mathcal{L}$ は非正値であり：

$$\langle \Phi \mathcal{L}(\Phi) \rangle \leq 0 \quad \text{for any } \Phi,$$

等号は Φ が $1, \boldsymbol{\zeta}$, および $|\boldsymbol{\zeta}|^2$ の線形和のとき，またそのときに限って成り立つ.

また，散乱核 R が次にあげる諸性質を満たすことを前提とする：

1. 任意の $\zeta_n > 0$，$\zeta_n^* < 0$，$|\boldsymbol{x}| = 1$ に対して

$$R(\boldsymbol{\zeta}^*, \boldsymbol{\zeta}; \boldsymbol{x}) \geq 0.$$

2. 任意の $\zeta_n > 0$, $|\boldsymbol{x}| = 1$ に対して

$$E(\boldsymbol{\zeta}) = \int_{\zeta_n^* < 0} \frac{|\zeta_n^*|}{|\zeta_n|} R(\boldsymbol{\zeta}^*, \boldsymbol{\zeta}; \boldsymbol{x}) E^* d\boldsymbol{\zeta}^*.$$

3. $\varphi = c_0 + c_i\zeta_i + c_4|\boldsymbol{\zeta}|^2$ （c_0, c_i, c_4 : $\boldsymbol{\zeta}$ に関する定数）とする．このような φ のうち，

$$\varphi E(\boldsymbol{\zeta}) = \int_{\zeta_n^* < 0} \frac{|\zeta_n^*|}{|\zeta_n|} R(\boldsymbol{\zeta}^*, \boldsymbol{\zeta}; \boldsymbol{x}) \varphi^* E^* d\boldsymbol{\zeta}^*$$

を満たすのは $\varphi = c_0$ だけである．

4. 任意の $\zeta_n > 0$, $\zeta_n^* < 0$, $|\boldsymbol{x}| = 1$ に対して

$$|\zeta_n^*| R(\boldsymbol{\zeta}^*, \boldsymbol{\zeta}; \boldsymbol{x}) E(\boldsymbol{\zeta}^*) = |\zeta_n| R(-\boldsymbol{\zeta}, -\boldsymbol{\zeta}^*; \boldsymbol{x}) E(\boldsymbol{\zeta})$$

が成り立つ．

5. R は各点 $\boldsymbol{x}$ において，$\boldsymbol{\zeta}$ および $\boldsymbol{\zeta}^*$ に関する次の 2 つの変換に関して不変である（局所等方性）:
(1) 境界の法線 $\boldsymbol{n}$ まわりの回転,
(2) 境界の法線 $\boldsymbol{n}$ を含む平面に関する鏡像.

性質 1–4 は一般表現定理ガ適用できるために必要である．また性質 5 は，付録 B に示す漸近理論におけるすべりの境界条件が適用できるために必要である．なお，後者については文献 [5] の 3.4 節に詳細な記述がある．

B　すべりの境界条件

単純剛体壁上の Hilbert 部分に対するすべりの境界条件は次のようにまとめられる [5, 6]:

$$\begin{aligned}
u_{i\mathrm{H}0} &= u_{\mathrm{w}i}, \\
u_{i\mathrm{H}1} n_i &= 0, \\
u_{i\mathrm{H}1} t_i &= k_0 S_{ij\mathrm{H}0} n_i t_j + K_1 G_{i\mathrm{H}0} t_i, \\
u_{i\mathrm{H}2} n_i &= b_1 \partial_k S_{ij\mathrm{H}0} n_i n_j n_k + b_2(\partial_j G_{i\mathrm{H}0} n_i n_j + 2\bar{\kappa} G_{i\mathrm{H}0} n_i), \\
u_{i\mathrm{H}2} t_i &= k_0 S_{ij\mathrm{H}1} n_i t_j k_0 + a_1 \partial_k S_{ij\mathrm{H}0} t_i n_j n_k + a_2 \bar{\kappa} S_{ij\mathrm{H}0} n_i t_j \\
&\quad + a_3 \kappa_{ij} S_{jk\mathrm{H}0} n_k t_i + a_4 \partial_j G_{i\mathrm{H}0} n_j t_i + a_5 \bar{\kappa} G_{i\mathrm{H}0} t_i + a_6 \kappa_{ij} G_{jH0} t_i.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{\mathrm{H}0} &= \tau_{\mathrm{w}}, \\
\tau_{\mathrm{H}1} &= -d_1 G_{i\mathrm{H}0} n_i, \\
\tau_{\mathrm{H}2} &= -d_1 G_{i\mathrm{H}1} n_i - d_4 \partial_k S_{ij\mathrm{H}0} n_i n_j n_k - d_3 \partial_j G_{i\mathrm{H}0} n_i n_j - d_5 \bar{\kappa} G_{i\mathrm{H}0} n_i.
\end{aligned}$$

ここで

$$S_{ij\mathrm{H}\ell} = -(\partial_j u_{i\mathrm{H}\ell} + \partial_i u_{j\mathrm{H}\ell}), \quad G_{j\mathrm{H}\ell} = -\partial_i \tau_{\mathrm{H}\ell}, \quad (\ell = 0, 1),$$

$(2kT_0/m)^{1/2}u_{wi}$ は境界の速度，$T_0(1+\tau_w)$ は境界の温度，n_i は境界の気体側向き単位法線ベクトル，t_i は境界の任意の向きの単位接ベクトルである．また，$\bar{\kappa}$，κ_{ij} は，κ_1/L と κ_2/L を境界の主曲率[3]，l_i および m_i を対応する主方向の方向余弦として

$$\bar{\kappa} = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2), \quad \kappa_{ij} = \kappa_1 l_i l_j + \kappa_2 m_i m_j$$

で定義される．k_0，K_1，b_1，b_2，$a_1 \sim a_6$，d_1，$d_3 \sim d_5$ はすべりの係数と呼ばれる．これらの係数の具体的な数値は拡散反射境界条件に対して，BKW 方程式および剛体球分子模型の Boltzmann 方程式をもとに調べられている．前者は

$$\begin{aligned}
&k_0 = -1.01619, \quad K_1 = -0.38316, \quad d_1 = 1.30272,\\
&a_1 = 0.76632, \quad a_2 = 0.50000, \quad a_3 = -0.26632,\\
&a_4 = 0.27922, \quad a_5 = 0.26693, \quad a_6 = -0.76644,\\
&b_1 = 0.11684, \quad b_2 = 0.26693, \quad d_3 = 0,\\
&d_4 = 0.11169, \quad d_5 = 1.82181,
\end{aligned}$$

後者は

$$\begin{aligned}
&k_0 = -1.2540, \quad K_1 = -0.6465, \quad d_1 = 2.4001,\\
&a_4 = 0.0330, \quad b_1 = 0.1069, \quad b_2 = 0.4779.
\end{aligned}$$

の数値を与える．

参考文献

[1] S. Takata, Symmetry of the linearized Boltzmann equation and its application, J. Stat. Phys. **136**, 751–784 (2009).

[2] S. Takata, Symmetry of the linearized Boltzmann equation II. Entropy production and Onsager–Casimir relation, J. Stat. Phys. **136**, 945–983 (2009).

[3] S. Takata, Note on the relation between thermophoresis and slow uniform flow problems for a rarefied gas, Phys. Fluids **21**(11), (2009). (to appear).

[4] Y. Sone, Asymptotic theory of flow of rarefied gas over a smooth boundary I, in *Rarefied Gas Dynamics*, L. Trilling, H. Y. Wachman, eds. (Academic, New York, 1969), Vol. 1, pp. 243–253.

[5] Y. Sone, Kinetic Theory and Fluid Dynamics (Birkhäuser, Boston, 2002); Supplementary Notes and Errata: Kyoto University Research Information Repository (http://hdl.handle.net/2433/66099).

[3] 曲率は曲率中心が気体側にあるとき負になるように定義している．

[6] Y. Sone, Molecular Gas Dynamics (Birkhäuser, Boston, 2007); Supplementary Notes and Errata: Kyoto University Research Information Repository (http://hdl.handle.net/2433/66098).

[7] P. L. Bhatnagar, E. P. Gross, and M. Krook, A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems, Phys. Rev. **94**, 511–525 (1954).

[8] P. Welander, On the temperature jump in a rarefied gas, Ark. Fys. **7**, 507–553 (1954).

[9] Y. Sone, Flow induced by thermal stress in rarefied gas, Phys. Fluids **15**, 1418–1423 (1972).

[10] Y. Sone and K. Aoki, Forces on a spherical particle in a slightly rarefied gas, in *Rarefied Gas Dynamics*, J. L. Potter ed., (AIAA, New York, 1979), pp. 417–433.

[11] Y. Sone and K. Aoki, Negative thermophoresis: Thermal stress slip flow around a spherical particle in a rarefied gas, in *Rarefied Gas Dynamics*, S. S. Fisher ed., (AIAA, New York, 1981), pp. 489–503.

[12] T. Ohwada and Y. Sone, Analysis of thermal stress slip flow and negative thermophoresis using the Boltzmann equation for hard-sphere molecules, Eur. J. Mech., B/Fluids **11**, 389–414 (1992).

[13] K. Aoki and Y. Sone, Temperature field induced around a sphere in a uniform flow of a rarefied gas, Phys. Fluids **30**, 2286–2288 (1987).

[14] S. P. Bakanov, V. V. Vysotskij, B. J. Derjaguin, and V. I. Roldughin, Thermal polarization of bodies in the rarefied gas flows, J. Non-Equilib. Thermodyn. **8**, 75–83 (1983).

[15] S. Takata, Y. Sone, and K. Aoki, Numerical analysis of a uniform flow of a rarefied gas past a sphere on the basis of the Boltzmann equation for hard-sphere molecules, Phys. Fluids A **5**, 716–737 (1993).