数理解析研究所講究録
第 1693 巻 2010 年 111-118

Blow-up for some parabolic equations with nonlinear boundary conditions

Junichi Harada (Waseda University)

Mitsuharu Ôtani (Waseda University)

次の半線形放物型方程式を考える.

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - a|u|^{p-1}u & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ \partial_\nu u = |u|^{q-1}u & \text{on } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

ここで $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域で, $p, q > 1$, $a > 0$ とする. 本稿での目的は有限時刻で爆発する (1) の解の挙動を調べることである. 方程式 (1) の有限時刻爆発と大域解の研究は [2], [7] で始められ, それ以後も多くの研究がなされてきた (cf. [1], [3], [8], [9]). これらの結果をまとめると次のようになる.
まず $p > 2q-1$ または $p = 2q-1$, $a > q$ のとき, (1) の解は大域的であり一様有界となる. 一方 $p < 2q-1$ または $p = 2q-1$, $a < q$ のときには, 有限時刻で爆発する解が存在する. (大域解が存在することもある). 特に, $p = 2q-1$, $a = q$, 空間一次元の場合には, (1) の正値解は大域的であり時刻無限大で次の正値特異解に収束する [2].

$$\phi'' = q\phi^{2q-1} \text{ in } (-1,1), \quad \phi(\pm 1) = +\infty.$$

我々は空間多次元の場合 $(n \geq 2)$ に次の様な結果を得ることができた.

Theorem 1. *Let $n \geq 2$, $p = 2q-1$ and $a = q$. Then every positive solution of* (1) *blows up in a finite time.*

従って, $p = 2q-1$ の場合は以下の様になる.

	$a < q$	$a = q$	$a > q$
$n = 1$	有限時刻爆発	無限時刻爆発	大域的かつ一様有界
$n \geq 2$	有限時刻爆発	有限時刻爆発	大域的かつ一様有界

次に有限時刻爆発する解に対して, blow-up rate を考察する. Rossi[10] は空間一次元の場合に, 初期値に対して仮定をおくことで (1) の blow-up rate を得ている. 我々は初期値には何も仮定せずに同様な結果を得ることができた.

Theorem 2 $(n \geq 1)$. *Let $p < 2q-1$ or $p = 2q-1$, $a < q$. Assume that $u(r,t)$ is a positive radially symmetric solution which blows up in a finite time T. Then there exist $c, C > 0$ such that*

$$c(T-t)^{-\frac{1}{2(q-1)}} \leq \|u(\cdot,t)\|_\infty \leq C(T-t)^{-\frac{1}{2(q-1)}}.$$

Theorem 2 で得られた blow-up rate は以下の自己相似変換の際に現れるものである. ここで $w(\rho,s)$ を以下で定義する.

$$w(\rho,s) = (T-t)^{1/2(q-1)}u(R-\rho(T-t)^{1/2},t), \quad T-t = e^{-s}. \tag{2}$$

このとき $w(\rho,s)$ は次を満たす.

$$\begin{cases} w_s = w'' - \dfrac{(n-1)}{R_s-\rho}w' - \dfrac{\rho}{2}w' - \dfrac{w}{2(q-1)} - ae^{-sk}w^p & \text{in } \Omega_s, \\ w'(0,s) = -w(0,s)^q & \text{for } s \geq s_0, \end{cases} \tag{3}$$

ここで $s_0 = -\log T$, $R_s = e^{s/2}$, $\Omega_s = \{(\rho,s); 0 < \rho < R_s, s > s_0\}$, $k = (2q-1-p)/2(q-1)$ である. 方程式 (1) は $-au^p$ と u^q の二つに非線形項を持つため, (3) の最後の項に e^{-sk} が現れることに注意する. Theorem 2 の条件下では $k \geq 0$ となり, 特に $p < 2q-1$ のとき $k > 0$, $p = 2q-1$ のとき $k = 0$ である. つまり, $p < 2q-1$ の場合と $p = 2q-1$ の場合では爆発時刻付近の解の挙動は異なることがわかる.
一方, $p = 2q-1$, $a = q$ の場合の blow-up rate も以下のように得ることができた. この場合, 自己相似変換から現れる指数とは異なることに注意する.

Theorem 3 $(n \geq 2)$. *Let $p = 2q-1$, $a = q$. Assume that $u(r,t)$ is a positive radially symmetric solution which blows up in a finite time T. Then there exists $c > 0$ such that*

$$\|u(\cdot,t)\|_\infty \geq c(T-t)^{-\frac{1}{(q-1)}}.$$

Moreover, if $u_0'(r) \leq u_0(r)^q$ for $r \in [0,R]$, then there exists $C > 0$ such that

$$\|u(\cdot,t)\|_\infty \leq C(T-t)^{-\frac{1}{(q-1)}}.$$

最後に爆発時刻付近の解の挙動について考察する. ここでは $p = 2q-1$, $a = q$ の場合のみを考える ($p < 2q-1$ または $p = 2q-1$, $a < q$ の場合には爆発時刻付近の解の挙動は (3) によって決定される [4], [10]). まず以下で与えられる新しい未知変数 $v(r,t)$ を導入する.

$$v(r,t) = u(r,t)^{-(q-1)}.$$

このとき,

$$\begin{cases} v_t = v'' + \dfrac{n-1}{r}v' + \dfrac{q}{(q-1)v}\left((q-1)^2 - |v'|^2\right), \\ v'(0,t) = 0, \ v'(R,t) = -(q-1). \end{cases} \tag{4}$$

(1) の解 $u(r,t)$ が時刻 T で爆発ことは, $v(r,t)$ が時刻 T でゼロに到達することと等価である. 特に, (1) の解 $u(r,t)$ は境界上 $\{r=R\}$ のみで爆発するので, $v(r,t)$ は境界上 $\{r=R\}$ でのみゼロに到達することになる. つまり, (1) の解 $u(r,t)$ の爆発時刻付近での挙動を調べるには, $v(r,t)$ の $r \sim R$ での挙動を解析すれば良いことになる. ここで境界条件 $v'(R,t) = -(q-1)$ を用いると, (4) 右辺の非線形項は $r=R$ においてゼロとなることに注意する. このことから, (4) 右辺の非線形項は $r \sim R$ において一様有界となることが期待され, $v(r,t)$ は $u(r,t)$ の爆発時刻 T 付近ににおいても振動せずに十分滑らかであることが予想される. 実際, $v(r,t)$ は時刻 T である関数に収束することがわかる. 我々は以下の定理を得ることができた.

Theorem 4. *Let $n \geq 2$, $p = 2q-1$, $a = q$, and $u(r,t)$ be a positive radially symmetric solution which blows up in a finite time T. Then $v(r,t)$ converges to some function $v_*(r)$ in $C^1([0,R])$ as $t \to T$.*

1 定理の証明

1.1 Theorem 1 の証明

まず $\Omega = B_R = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < R\}$ の場合を考える. 新しい未知関数 $v(x,t)$ を $v(x,t) = u(x,t)^{-(q-1)}$ で定義する. このとき正値球対称解 $v(r,t)$ は次を満たす.

$$\begin{cases} v_t = v'' + \dfrac{n-1}{r}v' + \dfrac{q}{(q-1)v}\left((q-1)^2 - |v'|^2\right), \\ v'(0,t) = 0, \ v'(R,t) = -(q-1), \ v(r,0) = v_0(r). \end{cases} \tag{5}$$

ここで $v_0(r) = u_0(r)^{-(q-1)}$ である. (1) の解 $u(r,t)$ の有限時刻爆発を示すには, $v(r,t)$ が有限時刻でゼロに到達することを示せば良い. 我々の証明において, $v'(r,t)$ の挙動を調べることが重要となる. そこで, (5) の両辺を r で微分することにより次の $V(r,t) = v'(r,t)$ の方程式を得る.

$$\begin{cases} V_t = V'' + \dfrac{n-1}{r}V' - \dfrac{n-1}{r^2}V - \dfrac{qV}{(q-1)v^2}\left((q-1)^2 - V^2\right) - \dfrac{2q}{(q-1)v}VV', \\ V(0,t) = 0, \ V(R,t) = -(q-1), \ V(r,0) = v_0'(r). \end{cases} \tag{6}$$

Lemma 1. $v(r,t)$ を (5) の正値解で $v_0'(r) \geq -(q-1)$ を満たすものとする. このとき $v'(r,t)$ は次を満たす.

$$v'(r,t) \geq -(q-1) \quad \text{for } (r,t) \in [0,R] \times [0,T).$$

Proof. (6) において, 比較定理を用いることにより得られる. □

Lemma 2. $u(x,t)$ を $\Omega = B_R$ としたときの (1) の解とする. このとき, $c > 0$ が存在して

$$|u(x,t)| \leq c(R - |x|)^{-1/(q-1)}.$$

Proof. $U_c(r) = c(R-r)^{-1/(q-1)}$ とおくと, $c > 0$ を十分大きく選ぶと $U_c(r)$ が super-solution となることがわかる. □

Lemma 3. $v(r,t)$ を (5) の正値解とする. このとき $v_0'(r) \geq -(q-1)$ を満たすならば, $v(r,t)$ は有限時刻で境界上 $\{r = R\}$ でゼロに到達する.

Proof. Lemma 1 より $v'(r,t) \geq -(q-1)$ なので, 境界条件 $v'(R,t) = -(q-1)$ と合わせると, $v''(R,t) \leq 0$ となる. また $v(r,t)$ は (5) の解なので, 次の微分不等式を得る.

$$v_t(R,t) \leq -\frac{(n-1)(q-1)}{R}. \tag{7}$$

Lemma 2 より, $v(r,t)$ は $[0,R)$ 上ではゼロに到達しないので, $v(r,t)$ は境界上 $\{r = R\}$ で有限時刻でゼロに到達することになる. □

次に, 一般領域の場合を考える. $u(x,t)$ を (1) の正値解とし, $d_0 = \sup_{x\in\Omega} \mathrm{dist}(x,0)$ とおく. このとき, 以下を満たす正値球対称関数 $w_0(r)$ を選ぶ: (i) $w_0(|x|) \in W^{2,\infty}(B_{d_0})$, (ii) $w_0(|x|) \leq u(x,0)$ for $x \in \Omega$, (iii) $w_0'(d_0) = w_0(d_0)^q$, (iv) $|w_0'(r)| \leq w_0(r)^q$ for $r \in [0,d_0]$. 実際, w_0 を以下のように選べば良い.

$$w_0(r) = \begin{cases} (\epsilon^{-(q-1)} + \frac{(q-1)d_0}{4})^{-1/(q-1)} & \text{if } r \in [0, d_0/2], \\ (\epsilon^{-(q-1)} + (q-1)(d_0 - r) - \frac{q-1}{d_0}(d_0 - r)^2)^{-1/(q-1)} & \text{if } r \in [d_0/2, d_0]. \end{cases}$$

ここで ϵ は十分小さい正の定数である. $w(r,t)$ を $\Omega = B_{d_0}$, 初期値を $w_0(r)$ とした時の (1) の解とする. ここで $z(r,t) = w(r,t)^{-(q-1)}$ とおく. $|w_0'(r)| \leq w_0(r)^q$ であったので $z_0'(r) \geq -(q-1)$ となり, Lemma 1 より $z'(r,t) \geq -(q-1)$ を得る. すなわち

$$w'(r,t) \leq w(r,t)^q \quad \text{for } (r,t) \in [0,d_0] \times (0,T).$$

従って,

$$\partial_\nu w(|x|,t) \leq w(|x|,t)^q \quad \text{for } (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T).$$

よって $w(|x|,t)$ は sub-solution となり,

$$u(x,t) \geq w(|x|,t).$$

Lemma 3 より, $w(|x|,t)$ は有限時刻で ∂B_{d_0} 上で爆発したので, $u(x,t)$ も有限時刻爆発を起こす.

1.2 Theorem 2 の証明

下からの評価 $c(T-t)^{-1/2(q-1)} \leq \|u(\cdot,t)\|_\infty$ は [6] の Theorem 1.1 の議論をそのまま適用すれば良いので, ここでは上からの評価 $\|u(\cdot,t)\|_\infty \leq C(T-t)^{-1/2(q-1)}$ のみを考察する. ここでは [5] で導入された議論と同様に, (2) で与えらる自己相似変換を用いる. (3) に対応するエネルギー汎関数は以下で与えられる.

$$E[w](s) = \int_0^{R_s} \left(\frac{|w'|^2}{2} + \frac{|w|^2}{4(q-1)} + \frac{ae^{-sk}|w|^{p+1}}{p+1} \right) X d\rho - \frac{|w(0,s)|^{q+1}}{q+1}.$$

ここで $X(\rho,s)=(1-\rho/R_s)^{n-1}e^{-\rho^2/4}$. まずエネルギー汎関数の単調性を調べるために, s で微分すると次を得る.

$$\frac{d}{ds}E[w](s)=-\int_0^{R_s}\left(|w_s|^2+\frac{ake^{-sk}|w|^{p+1}}{p+1}\right)Xd\rho$$
$$+\frac{(n-1)}{2}\int_0^{R_s}\left(\frac{|w'|^2}{2}+\frac{|w|^2}{4(q-1)}+\frac{a|w|^{p+1}}{p+1}\right)\frac{\rho X}{R_s-\rho}d\rho.$$

実はこのとき次を示すことができる.

$$\frac{d}{ds}E[w]\le-\frac{1}{2}\int_0^{R_s}|w_s|^2Xd\rho+ce^{-s/2}.$$

残りの証明は [2] の Theorem 4.2 の証明の議論をそのまま適用すれば $w(r,t)$ の一様有界性を示すことができる. よって, 上からの評価 $\|u(\cdot,t)\|_\infty\le C(T-t)^{-1/2(q-1)}$ が得られたことになる.

1.3 Theorem 3 の証明

ここでも $v(r,t)=u(r,t)^{-(q-1)}$ の振る舞いを考察する. Theorem 3 を示すには以下を示せば十分である.

$$-c\le v_t(R,t)\le -C. \tag{8}$$

実際, $v(r,t)$ が境界上 $\{r=R\}$ でのみゼロに到達することを用いて, (8) を (t,T) 上で積分して式変形すれば

$$c^{-1/(q-1)}(T-t)^{-1/(q-1)}\le u(R,t)\le C^{-1/(q-1)}(T-t)^{-1/(q-1)}.$$

- **(8) の下からの評価**

次の Lemma を示すことが鍵となる. 証明はここでは省略する.

Lemma 4 (微分の評価). $u(r,t)$ を (1) の正値球対称解とする. このとき, $T_1\in(0,T)$, $m_1>0$ が存在して, $(r,t)\in[0,R]\times[T_0,T)$ に対して

$$v'(r,t)\le-(q-1)+m_1(R-r).$$

Lemma 4 と境界条件 $v'(R,t)=-(q-1)$ より, $v''(R,t)\ge -m_1$ を得る. よって, (5) において, $r=R$ を代入することにより

$$v_t(R,t)=v''(R,t)-\frac{(n-1)}{R}(q-1)\ge -m_1-\frac{(n-1)}{R}(q-1).$$

従って (8) の下からの評価が得られたことになる.

- **(8) の上からの評価**

仮定 $u_0'(r)\le u_0(r)^q$ より, $v_0'(r)\ge-(q-1)$ となる. これより Lemma 1 の証明の最初の議論により (7) を得る. これは (8) の上からの評価を意味している.

Theorem 3 の注意

今のところ, 上からの評価には初期値に仮定を設けているが, この仮定は必要ないと思われる.

1.4 Theorem 4の証明

ここでも $v(r,t)$ の挙動を考察する. Theorem 4を得るには, 次を示せば良いことに注意する.

(i) $v_t(r,t)$ の有界性 (ii) 方程式 (5) の右辺の項 $\frac{1}{v}\left((q-1)^2-|v'|^2\right)$ の有界性

実際, (i), (ii) が示されたとすれば, (5) より $v''(r,t)$ の一様有界性が直ちに導かれる. よって, Theorem 4を得ることができる. 以下の議論で $u(r,t)$ と書いたら (1) の正値球対称解を表すものとする. まず, 以下の議論でよく用いる評価式を用意する.

Lemma 5. 任意の $r'\in(0,R)$ に対して, $c_{r'}>0$ が存在して

$$|u'(r,t)|\le c_{r'}\quad\text{for } (r,t)\in[0,r')\times(0,T).$$

Lemma 6. $K>0$ が存在して

$$|u_t(r,t)|\le u_t(r,t)+K\quad\text{for } (r,t)\in[0,R\times(0,T).$$

以下三つのLemmaより (i)-(ii) が示される.

Lemma 7. $R'\in(0,R)$, $C_0>0$ が存在して

$$u_t(r,t)\le C_0u'(r,t)\quad\text{for } (r,t)\in[R',R]\times[0,T)$$

Proof. Lemma 4と (8) の下からの評価を用いて比較定理を適用すれば示すことができるが, ここでは省略する. □

Lemma 8. $C_1>0$ が存在して

$$|v'(r,t)|\le C_1\quad for\ (r,t)\in[0,R]\times[0,T).$$

Proof. Lemma 4より, $R'=R-(q-1)/m_1$ とすると

$$-(q-1)-m_1(R-r)\le v'(r,t)\le 0\quad\text{for } (r,t)\in[R',R]\times[0,T).$$

よって, $(r,t)\in[R',R]\times[0,T)$ に対して

$$\begin{aligned}v''&=v_t-\frac{n-1}{r}v'+\frac{q}{(q-1)v}\left(|v'|^2-(q-1)^2\right)\\&\ge v_t+\frac{q(-2M(q-1)(R-r)+M^2(R-r)^2)}{(q-1)v}\ge-|v_t|-c.\end{aligned}$$

ここで $[u]_+=\max\{u,0\}$, $[u]_-=\max\{-u,0\}$ とすると

$$[v'']_-\le|v_t|+c\quad\text{for } (r,t)\in[R',R]\times[0,T).$$

Lemma 6 と Lemma 7 より,

$$[v'']_- \le -C_0 v' + c' \quad \text{for } (r,t) \in [R', R] \times [0, T).$$

両辺を積分すれば,

$$\int_{R'}^{R} [v'']_- = -C_0(v(R,t) - v(R',t)) + c'(R - R').$$

一方, $v'' = [v'']_+ - [v'']_-$ であるので

$$\int_{R'}^{R} [v'']_+ = \int_{R'}^{R} v'' + \int_{R''}^{R} [v'']_- = -(q-1) - v'(R',t) + \int_{R'}^{R} [v'']_-.$$

従って Lemma 5 を用いれば, 次が導かれたことになる.

$$\int_{R'}^{R} |v''(r,t)| dr \le c_{R'}.$$

よって,

$$v'(r,t) = v'(R,t) + \int_{r}^{R} v''(\rho,t) d\rho \ge -(q-1) - C.$$

逆向きの評価 $v'(r,t) \le C$ は Lemma 4 より得られる. □

Lemma 9. $C_2 > 0$ が存在して, 次が成立する.

$$|v'(r,t)^2 - (q-1)^2| \le C_2 v(r,t).$$

Proof. (1) に u' をかけて (r', r) 上積分すると,

$$u'(r,t)^2 - u(r,t)^{2q} = u'(r',t)^2 - u(r',t)^{2q} - 2\int_{r'}^{r} \frac{(n-1)}{r} |u'|^2 + 2\int_{r'}^{r} u_t u'. \tag{9}$$

Lemma 4 より $r' \in (0, R)$ を以下を満たすように選べる.

$$u'(r,t) \ge 0 \quad \text{for } (r,t) \in (r', R) \times (0, T).$$

Lemma 8 より $|u'(r,t)| \le C u(r,t)^q$ なので, Lemma 5 と Lemma 7 を用いると, $(r,t) \in (r', R) \times (0, T)$ に対して

$$\int_{r'}^{r} |u_t||u'| \le c \int_{r'}^{r} (|u'|^2 + 1) \le c' \int_{r'}^{r} (u' u^q + 1) \le c'' u(r,t)^{q+1} \tag{10}$$

ここで (9) に (10) を代入すると

$$|v'(r,t)^2 - (q-1)^2| \le c_{r'} u(r,t)^{-q+1} = c_{r'} v(r,t).$$

よって, Lemma 9 は示された. □

Lemma 7 と Lemma 8 より (i) が示される. また, (ii) は Lemma 9 より得られる.

References

[1] F. Andreu, J. M. Mazón, J. Toledo, J. D. Rossi, Porous medium equation with absorption and a nonlinear boundary condition, Nonlinear Anal. TMA **49** (2002) 541-563.

[2] M. Chipot, M. Fila, P. Quittner, Stationary solutions, blow up and convergence to stationary solutions for semilinear parabolic equations with nonlinear boundary conditions, Acta Math. Univ. Comenianae **60** (1991) 35-103.

[3] M. Chipot, P. Quittner, Equilibria, connecting orbits and a priori bounds for semilinear parabolic equations with nonlinear boundary conditions, J. Dynam. Differential Equations **16** (2004) 91-138.

[4] M. Fila, P. Quittner, The blow-up rate for the heat equation with a non-linear boundary condition, Math. Methods Appl. Sci. **14** (1991) 197-205.

[5] Y. Giga, R. V. Kohn, Characterizing blowup using similarity variables, Indiana Univ. Math. J. **36** (1987) 425-447.

[6] J. S. Guo, B. Hu, Blowup rate for heat equation in Lipschitz domains with nonlinear heat source terms on the boundary, J. Math. Anal. Appl. **269** (2002) 28-49.

[7] J. López Gómez, V. Márquez, N. Wolanski, Dynamic behavior of positive solutions to reaction-diffusion problems with nonlinear absorption through the boundary, Rev. Unión Mat. Argent. **38** (1993) 196-209.

[8] P. Quittner, On global existence and stationary solutions for two classes of semilinear parabolic problems, Comment. Math. Univ. Corolinae **34** (1993) 105-124.

[9] A. Rodríguez-Bernal and A. Tajdine, Nonlinear balance for reaction-diffusion equations under nonlinear boundary conditions: dissipativity and blow-up, J. Differential Equations **169** (2001) 332-372.

[10] J. D. Rossi, The blow-up rate for a semilinear parabolic equation with a nonlinear boundary condition, Acta Math. Univ. Comenianae, **67** (1998) 343-350.