

Title	エッジトーンの2次元数値計算のPCによる試み (オイラー方程式の数理解析: 渦運動と音波150年)
Author(s)	水谷, 俊; 加古, 孝
Citation	数理解析研究所講究録 (2010), 1697: 72-79
Issue Date	2010-07
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/141671">http://hdl.handle.net/2433/141671</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## エッジトーンの 2 次元数値計算の PC による試み

電気通信大学情報工学専攻 水谷 俊 (MIZUTANI, Shun)

電気通信大学情報工学科 加古 孝 (KAKO, Takashi)

Department of Computer Science,

The University of Electro-Communications

Chofu, Tokyo 182-8585, JAPAN Email: kako@im.uec.ac.jp

### 1 はじめに

近年、コンピュータの計算能力の向上を背景に、さまざまな物理現象が数値計算されている。ここでは流体音の一種であるエッジトーンを研究対象とする。

エッジトーンとはジェットが楔形の物体（以下、エッジと言う）に衝突することで発生する空力音（エアリード楽器の音源と考えられている）のことである。エッジトーンの周波数に対しては、物理実験に基づく経験式が Brown [2] により導かれており、この式と数値計算による結果の比較が行われている [11]、[6]。特に [11] では三次元問題を扱い、空間および時間の離散化を十分に行なうためにスーパーコンピュータを使って数十時間以上かけて計算を行なっている。

本研究では、以下のような方法で二次元におけるエッジトーンを手軽なミドルエンドのコンピュータ（Core 2 Duo E8500 3.16GHz および 同 E6300 1.83GHz）を用いて短時間で計算し、パラメータを様々に変化させて Brown [2] にある実験式と比較する。

数値計算手法としては有限要素法を用い、領域を離散化する際に、より精度を必要とすると思われる領域に節点を集中させるアダプティブな分割法を用いる。その手段として使いやすいインターフェースを作成する。流速の計算は、現在普及している二つのプロセッサ・コアを持つ CPU の特性を生かして 2 スレッド化して計算を行なう。

### 2 数値モデルと数値実験

#### 2.1 エッジトーン発生メカニズムについてのシナリオ

エッジトーン生成のシナリオとしては、1) 狭いスリットから吹き出すジェットがエッジに衝突して圧力変動が生じ、2) それが上流に伝播して励起された局所的な渦度の変動がスリットとエッジとの衝突領域間で増幅され、3) 周期的な擾乱が形成されてエッジトーンが生じる、という説（圧力フィードバック説）が唱えられている（[6]などを参照）。

この際、Primary vortex と Secondary vortex という渦が発生し、Primary vortex はジェットの不安定さによって生じる渦で、エッジがない場合にも存在すると言われている。実際、それを裏付ける物理実験も存在する。

## 2.2 ジェットの数値シミュレーション

上のシナリオを裏付ける数値シミュレーションを行うために、次のような状況の下で数値実験を行った。

- 数値実験 - その1

まず、エッジがない状態においてジェットの不安定について数値シミュレーションを行った。結果として流体の不安定性が確認されたが、不安定現象の数値計算に特徴的な現象として、数値解の様子は、空間分割数や吹き出し流速によって敏感に変化した。

- 数値実験 - その2

次に、エッジがある状態においてエッジトーンを数値シミュレーションし、エッジの影響を調べる。特に、Brown の式に含まれるパラメータ（吹き出し流速  $U$  とスリット-エッジ間距離  $L$ ）を変化させて数値実験を行ない、数値計算結果を Brown の式と比較する。ここで、エッジトーンの周波数  $f$  に対する Brown の式 [2] は次のように与えられる。

$$f = 0.466j_k(100U - 40)\left(\frac{1}{100L} - 0.07\right), \quad k = \text{ステージ} \quad (1)$$

$$j_1 = 1, \quad j_2 = 2.3, \quad j_3 = 3.8, \quad j_4 = 5.4$$

- 数値実験 - その3

さらに、Brown による物理実験において確認されているヒステリシス現象を数値シミュレーションできるかどうかを確認する。特に、流速を増加させていったときと減少させていったときとで、発生するエッジトーンのステージに違い（ヒステリシス）が現れるかどうかの確認を行った。

## 3 エッジトーンの数値シミュレーション

本研究で用いたエッジトーンの数値シミュレーションの計算方法について以下に述べる。従来から、エッジトーンの数値シミュレーションの方法としては、圧縮性流体を直接解く方法と、非圧縮性流体の解と音響学的類推 (acoustic analogy) を組み合わせて解く方法がある。

本研究では、手近なコンピュータを用いて計算することで、解の性質をより詳しく調べることができる後者の方法を用いる。さらに計算量の制限から、図1のような配置における2次元計算を行う。また、空間離散化においてはジェットの近傍に節点を集めるアダプティブなメッシュを生成させる。このために使い勝手の良いインターフェイスを開発して用いた。

二種類の流速、二種類の空間メッシュ、二種類の時間刻みを用い、以下の領域形状と境界条件のもとでジェットの数値シミュレーションを行なった。

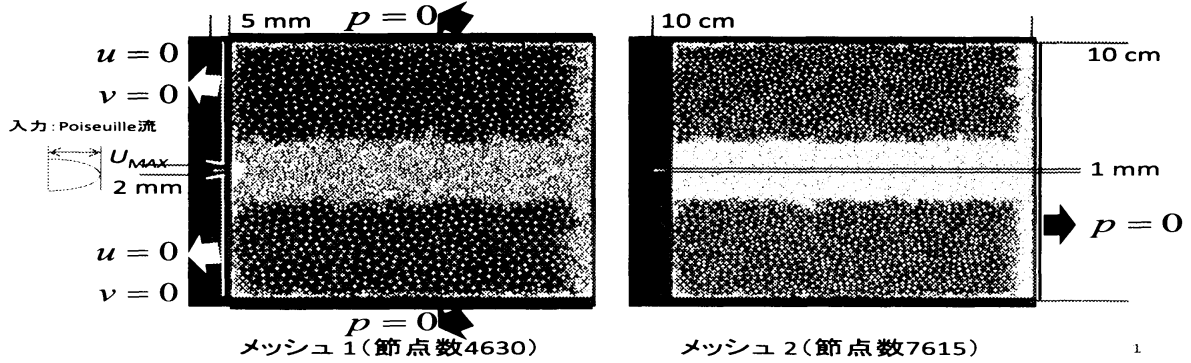


図 1: 2次元領域とメッシュ分割例 - エッジ無し

### 3.1 音響学的類推

音響学的類推においては、空気に関して非圧縮性を仮定して流速および圧力を求め、得られた圧力変動から Lighthill の理論によって音圧を計算する。ここで、Navier-Stokes 方程式 (Reynolds の形式) から導かれる音圧に対する Lighthill の表現式は以下のように与えられる [5]、[4]

$$\left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)[c_0^2(\rho - \rho_0)] = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (2)$$

ここで

$$T_{ij} = \rho u_j u_j + ((p - p_0) - c_0^2(\rho - \rho_0))\delta_{ij} - \sigma_{ij}, \quad (3)$$

$$\sigma_{ij} = 2\eta(\epsilon_{ij} - \frac{1}{3}\epsilon_{kk}\delta_{ij}), \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad (4)$$

かつ、 $c_0$  は音速、 $\rho_0$ 、 $p_0$  は遠方における一様な空気の密度と圧力ポテンシャルである。 $\delta_{ij}$  はクロネッカーのデルタである。

次に、Curle の式は、エッジ表面  $S$  を持つ物体がコンパクトであり、観測地点  $x$  が音源より十分離れているとき、Lighthill の表現式から導かれる。Curle の式により双極子音圧  $p_d$  を求める。ここで、Curle の式は、 $|u| \ll c_0$  の仮定の下で、 $|x| \rightarrow \infty$  において次のように与えられる [5]、[4]。

$$p_d(t, x) = \frac{1}{4\pi c_0} \frac{x_i}{|x|^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_S n_i p\left(t - \frac{|x|}{c_0}, y\right) dS_y \quad (5)$$

この式の計算において、エッジ表面  $S$  での圧力  $p$  は 3 次のスプライン関数で補間する。また、表面積分の計算には 5 次の Gauss-Legendre 公式を用いる。さらに、時間微分は中心差分を用いる。

### 3.2 流体の方程式と数値解法

次に、流体の基礎方程式について簡潔にのべる。流体は非圧縮粘性流体であると仮定する。流れは2次元非定常流を扱う。基礎方程式は次の Navier-Stokes 方程式である。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad Re = \frac{L_R U_R}{\mu} \quad (6)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (7)$$

であり、 $Re$  はレイノルズ数、 $L_R$  は代表長さ、 $U_R$  は代表流速、 $\mu$  は流体の動粘性係数である。

Navier-Stokes 方程式の計算手法には、分離解法の一つである流速修正法を用いた。有限要素法により離散化を行い、速度場と圧力場には区分的一次連続関数を用いる。

計算ステップは、流速に対して前進オーラー法的に扱い、圧力は時間ステップ後の圧力を圧力ポアソン方程式で求める。そのために、第  $n$  ステップまで出計算された流速  $u_i^n$  から中間流速を

$$u'_i = u_i^n - \Delta t \left\{ u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} - \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^n}{\partial x_i} \right) \right\} \quad (8)$$

で定義し、次に圧力を

$$\frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i^2} = \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} \quad (9)$$

で求め、最後に

$$u^{n+1} = u'_i - \Delta t \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} \quad (10)$$

で次のステップでの流速を計算する。

中間流速および流速の各成分は各スレッドで計算する。圧力は  $LU$  分解を利用して直接解法で計算する。なお、数値振動を抑制するために SUPG 法 [1] を用いる。圧力の妥当な境界条件については様々な議論がある。ここでは、十分エッジから離れた場所に人工的計算のための境界を置き、そこで  $p = 0$  の条件を与えて計算した。

### 3.3 メッシュ生成など

メッシュ生成については Jonathan Richard Shewchuk により作成された Triangle (version 1.6) [9] (Copyright 1993, 1995, 1997, 1998, 2002, 2005 Jonathan Richard Shewchuk) というプログラムを用いて自動三角形要素分割した。

このプログラムを用いることで、Delaunay 三角分割法を用いて作成される要素の最大面積と最小角を設定できる。また、いったん要素分割した後に、各要素それぞれに最大面積・最小角を設定してそれをもとに再分割することも可能にした。この機能を利用して、重要だと思われる領域に節点が集まるよう手動で要素分割を調整する事を可能にした。さらに、各要素の最大面積・最小角をグラフィカルに設定できるユーザーインターフェースを作成した。

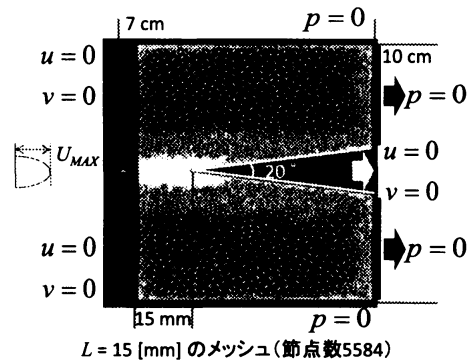


図 2: メッシュ分割の例-エッジあり

### 3.4 エッジトーンの数値シミュレーション

エッジトーンの生成についてのシミュレーションは、 $L$  および  $U_{MAX}$  を変化させる実験、補正  $Re$  を用いる実験、ヒステリシス現象を確認する実験などを行なった。

数値シミュレーションで用いたパラメータとして、 $L = 5 [mm]$ 、 $U_{MAX} = 20 [m/s]$  としたときのエッジから十分離れた観測地点 ( $1m, 1m$ ) での音圧とパワースペクトルの計算結果を示す。

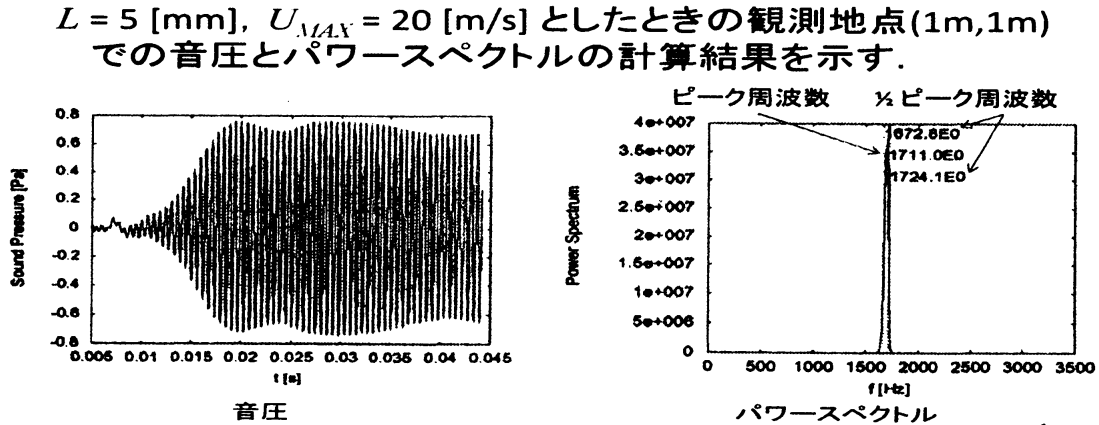


図 3: エッジトーン音圧の時間プロフィールとパワースペクトラム

最後に、固定した幾何学的形状のもとで、吹き出し流速を上げていく場合と、下げていく場合で、ステージの移り変わる流速に違いが出るという、いわゆるヒステリシス現象について数値実験を行い、一例として、図 4 のような結果が得られた。この結果は必ずしも Brown [2] にある実験式と定性的にそのままでは一致しないが、代表流速を調整することで実験式に数値結果を近づけることが出来ることも見出している。実験におけるレイノルズと数値実験におけるレイノルズをどのように設定するかは今後の課題である。

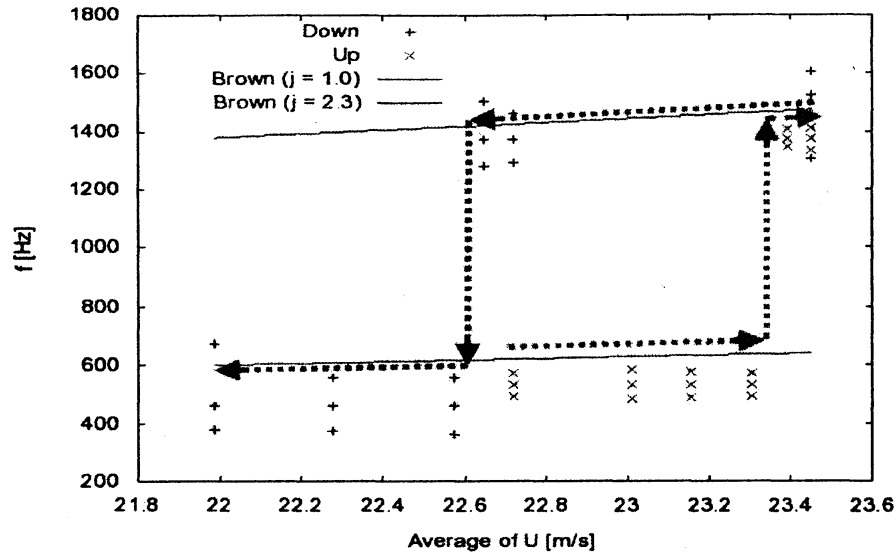


図 4: ヒステリシスの確認: Brown の実験式 (点線) と数値計算例  $\times$  ( $U$  増加の場合),  $+$  ( $U$  減少の場合) との比較

## 4 結果のまとめと今後の課題

今回の数値シミュレーションの結果と今後の課題をまとめておく。

### 4.1 数値的に確認できたこと

- ステージ 1 およびステージ 2 における Brown による実験式に一致する強い周波数成分を持つエッジトーンが数値的に確認できた。
- レイノルズ数  $Re$  を補正することで Brown の式との一致が良くすることが出来ることを発見した。また、 $Re$  が大きいほど乱れた流れとなるため、 $Re$  はエッジトーンに影響を及ぼす重要なパラメータと再認識できた。
- 吹き出し口とエッジ間の距離  $L = 15[\text{mm}]$  とした状況においてヒステリシス現象が数値的に確認できた。

### 4.2 数値シミュレーション結果と Brown による物理実験結果の相違点

- 流速  $U$  およびスリット-エッジ間距離  $L$  と、発生するエッジトーンの周波数  $f$  の関係は Brown の式とよく一致したものの、そのステージ  $k$  に違いがあった。
- 例えば  $U = 18[\text{m/s}]$  とすると、 $L = 5, 10, 15[\text{mm}]$  のそれぞれにおけるステージは、本数値実験結果によるとすべて 1 だが、Brown による物理実験結果によるとそれぞれ 1 (または 2), 3, 4 となっている。

- 数値例で、 $Re$  を大きくするとステージが上がったケースがあったので  $Re$  の取り扱い方に問題がある可能性がある。

### 4.3 今後の課題など

- 各計算は 1 時間～ 10 時間程度で行えたが、中間流速および流速の計算の並列化によって、さらに 10 % 程度計算時間を短縮できた。今後、節点のリナンバリング方法を改善したり、圧力の計算方法に反復解法を用いることで計算時間のさらなる短縮が期待できる。
- 数値計算によるエッジトーンのステージを Brown による物理実験に合わせる事が今後の課題となる。レイノルズ数を調整するだけで、数値結果を全ての実験結果に合わせることができるか？
- エッジトーンを発音メカニズムとするエアリード楽器の 2 次元モデルを作成し、パイプ部分との共鳴も考えつつ数値シミュレーションを行なう。

### 参考文献

- [1] A. N. Brooks, T. J. R. Hughes, Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.32 (1982) pp.199-259.
- [2] G. Brown, The vortex motion causing edge tones, *Proceedings of Physical Society of London*, Vol.49 (1937) pp.493-507.
- [3] N. Curle, The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound, *Proceedings of the Royal Society of London*, Vo.231 (1955) pp.505-514.
- [4] M. S. Howe, *Theory of Vortex Sound*, Cambridge University Press, 2003.
- [5] M. J. Lighthill, On sound generated aerodynamically I. General theory, *Proceedings of the Royal Society of London*, A 211 (1952) pp.564-587.
- [6] 村中洋子, 野々村拓, 藤井孝蔵, エッジトーン周波数特性の数値シミュレーション, *Transactions of JSCES*, Paper No. 20050026 (2005).
- [7] 日本数値流体力学会有限要素法研究委員会, 有限要素法による流れのシミュレーション, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1998.
- [8] A. Powell, *Acustica*, Vol.3 (1953).



- [9] J. R. Shewchuk, Triangle, <http://www-2.cs.cmu.edu/quake/triangle.html>, Computer Science Division University of California at Berkeley, 2005.
- [10] T. E. Tezduyar, S. Mittal, S. E. Ray and R. Shih, Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.95 (1992) pp.221-242.
- [11] 土田潤, 伊東聰, 藤澤智光, 矢川元基, エアリード楽器の発音メカニズムの数値流体力学, *日本機械学会論文集 (B編)*, Vol.69-No.678 (2003) pp.280-285.
- [12] 土田潤, 矢川元基, 藤澤智光, フリーメッシュ法ベースの統一解法によるエッジトーンの直接計算, 第 17 回数値流体力学シンポジウム F4-1, JSFM, 2003.