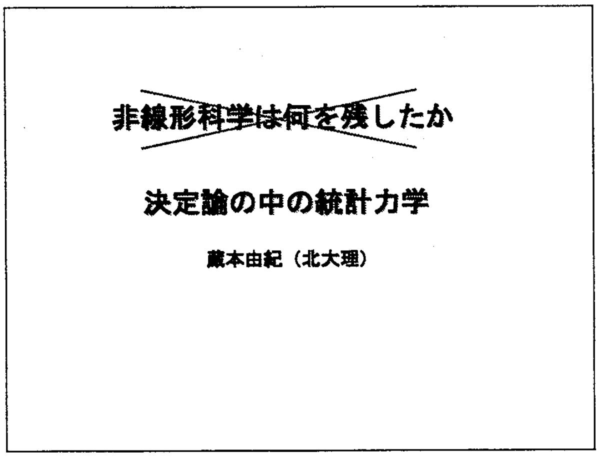
非線形科学は何を残したか

北海道大学　蔵本 由紀

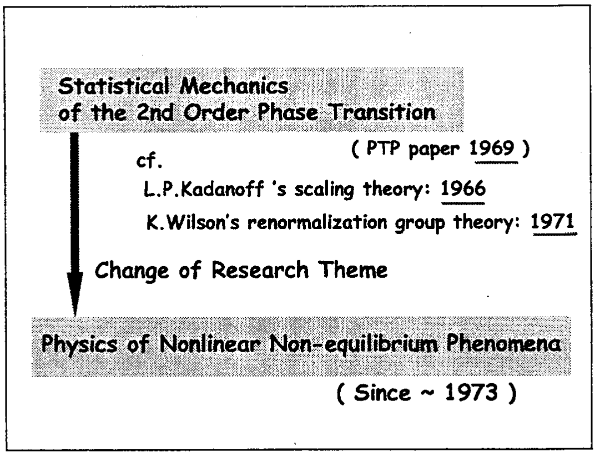
早川 :それではこれから物性のセッションが始まります．三つ，物性の講演がありますけれども，そのなかでも sub structure がありまして，まず最初は「非線形科学は何を残したか」ということで，蔵本先生にお願いします．あと二つは，固体物性の話があります．

蔵本先生，去年の研究会の世話人であったのですけれども，北海道で同じような研究会があって，来られなかったということと，もう一つは，みなさんにお配りした資料にもありますけれども，物理学をどう捉えるかということについて，枠を広げることをもっと大胆におやりになったほうがいいということを提言されています．実際に蔵本先生は，そういう枠を広げるということを，具体的に体現してこられてきたので，この機会にそのことをお聴きしたいということで，講演をお願いしました．それではよろしくお願いします．

どうぞよろしくお願いします．「非線形科学は何を残したか」という題は，ずいぶん以前に早川さんから「もう題は決まったか」と聞かれてかなりいい加減にこういう題にしてしまったのですが，少しまずかったかなと思います．



[Slide 1]



[Slide 2]

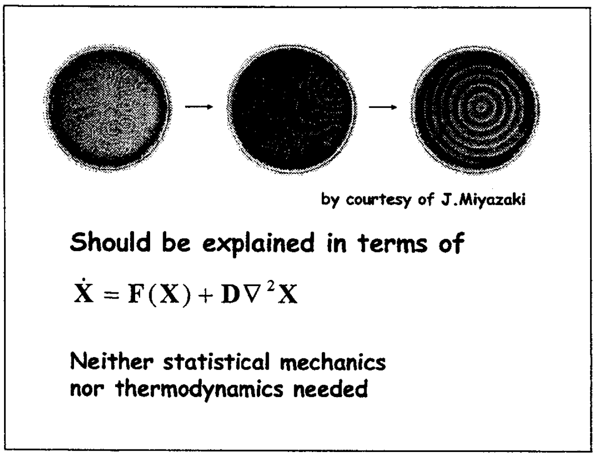
[Slide 1] なぜなら，このタイトルだと非線形科学がもう終わってしまったみたいな感じがあります．「もう終わった」という人も確かにいるんですが，それは正しい面もありますが，実際のところは終わったというより，非線形科学ってもう何がなんだか，非常に雑多なあらゆるものを包含するような分野に広がってしまっている．かつてはそうではなかったんですが，今は非線形というひとくくりで，一つの分科としてアイデンティティーを保ちにくくなっている．あるていど一般的な理論の枠組みはでき上がっているのですが，そうした方法なり概念なりが具体的な分野に浸透した結果，そこで有効かどうかがいろいろな形で問われている．そういう状況だと思います．その意味で一時代は終わったと言えるかもしれません．しかし，重要な問題は片付いてしまって細かいことしか残っていないというのとはちょっと違う気がします．それでどういうタイトルに改めたかというと，「決定論の中の統計力学」としてみました．内容的には今日配布された資料にごちゃごちゃ書いてあるのと大体同じような話になるかと思います．

「決定論の中の統計力学」の意味ですが，決定論というのは非線形科学の中心をなす考え方です．決定論的なダイナミカル・システムに基づく研究というものが中心にあったわけですが，要するに微分方程式ですね．それと統計力学とはずいぶん異質なように思われます．たしかに確率論と

か普通の意味での統計は見かけ上そこにはない．けれども，そういう決定論の中にも統計力学的に非常に重要な考え方があるということを私自身の経験を通じてお話したい．「決定論の中の統計力学」と聞けばすぐにカオスの統計力学かと思われるかもしれませんが，ここではそういう意味ではないんです．少し別の意味です．聴いていただけばわかります．

[Slide 2] 私の話はさきほどのいくつかのご講演とは違って，非線形現象の科学，あるいは非線形現象の物理の歴史を網羅的にお話しするわけではありませんし，解説をしようというわけでもありません．それを私がやると中途半端になってしまうと思いますので．むしろ私の目から見た，私の研究の窓から見た非線形科学――私は決定論に基づいた研究をこれまでやってきたのですが，そうした私の経験を通じて，決定論の中にも統計力学があり，それは非常に重要なものだなと最近ますます感じるようになってきたわけです．そうしたことを中心に話したいと思います．

多少私の個人的な研究歴に関することで恐縮なのですが，私はかつて二次相転移の理論というものをやっていました．大学院のとき，1966 年ですが，L.Kadanoff のスケーリング理論というものが出て，K.Wilson の繰り込み群の方法による臨界現象の理論が 1971 年ですね．私の学位論文が公表されたのが 1969 年．これらの偉大な仕事の中間，一種の過渡期です．ですから臨界現象の分野というのがものすごく面白くなりかけたときだったのですが，なぜかやめてしまった．そしてまったくテーマを変えました．まったく変えたというのは私の思い込みだったかもしれないというのが後の話に関係することなのですが，ともかく，非線形非平衡現象の物理をやりたいということで，当時大学紛争があってずいぶん大学が荒れてしばらく呆然としていましたが，1973 年頃から非線形非平衡の分野に入っていきました．



[Slide 3]

Japanese great traditions in statistical mechanics

Aiming to create pioneering works in the Nonlinear regime also

"Top-down" movement in the early 1970s

Headed by H.Mori, T.Matsubara,...

[Slide 4]

[Slide 3] 元来私は統計力学が好きですが，それはもともと自己組織化的な現象に興味があって，相転移の統計力学に関わった理由の一つもそれでした．非線形非平衡現象の物理はそうした自分の希望にいっそうかなうものでした．当時，非常に評判になった現象として，ここに示したような Belousov-Zhabotinsky 反応という，自己組織的に発展する化学反応系でのパターンがありました．それを理論的にどうしても理解したい，説明したいというのがこのような分野に入った私の直接の動機でした． 私が実際にこの現象を知ったのは，1970 年の Zhabotinsky 自身による『Nature』に出た論文（Zaikin との共著）だったと記憶します．それは振動する反応系でしたが，同心円状の波動パターンがまるで生き物のように成長発展し，お互いに食い合いをして最後に唯一の同心円が全体を支配するというものでした．これを何とか理論的に説明できないものかと思いました．

それは一見統計力学とは何の関係もない，反応拡散系という非線形偏微分方程式の解の問題ですね．そういう数学の問題に過ぎないということは最初からわかっていました．たしかにここには何らの統計力学もないし，エントロピーとかエネルギーという熱力学の言葉で説明できるような現象

でもない．微分方程式という決定論的な力学モデルに基づく説明しかないだろうと考えたわけです．

[Slide 4] そうすると，私の好きな統計力学はもう続けられないという寂しさがあるわけです．しかし，当時，非線形非平衡の物理をわが国でも大いに発展させようという動きがあって，それにも影響されて私はこの分野に入ったのです．そういう動きには以下の述べるようにプラス面ばかりでなく，以下のようにマイナス面もあったと思います．そうした動きは森肇先生や松原武生先生といった，私より一回りも二回りも上の世代の先生方によってかなりトップダウン的に先導されたように思います．基研研究会や，たぶん松原先生を代表者とする科研費の申請（課題名に「非平衡定常」とかいう文言があったと記憶します），そういう集まりに出かけていっていろいろと刺激を受けたわけです．

ところが，そういう場にはやはり統計力学というものが大きく前面に出ていました．ご存知のように，日本では統計力学には偉大な伝統があります．久保亮五の線形応答理論，森肇の一般化ブラウン運動の理論，松原グリーン関数，あるいは少し後の時代になりますが川崎恭治のモード結合理論，そうした偉大な仕事が出ている．ただ，この時期（1970年代の前半）までの統計力学は，主に熱平衡状態近傍の線形領域に関するものなので，ぜひともわが国から非線形領域をもカバーする非平衡統計力学のオリジナルな仕事を発信しようというのがこの運動の motivation になっていました．ですから，統計力学とは一応無関係な決定論などというものは埒外だと言えます．そういう雰囲気があったことは否めない事実だと思います．つまり，決定論的アプローチが入る余地がない．線形非平衡統計力学 vs. 非線形非平衡統計力学という図式で捉えられると，決定論の居場所がない．それが先に述べたマイナス面です．

"Linear" statistical mechanics
vs.
"Non-Linear" statistical mechanics

No room for deterministic approaches ?

Thermal fluctuations are basically irrelevant to self-organization phenomena on a macroscopic scale

Maybe this was admitted (reluctantly).
Still I presume there was something psychological not accepting this fact.

[Slide 5]

"Wave of CHAOS"

Popularized since ~1976 (in Japan)

Many statistical physicists rushed into CHAOS

Determinism became no longer regarded as exotic

[Slide 6]

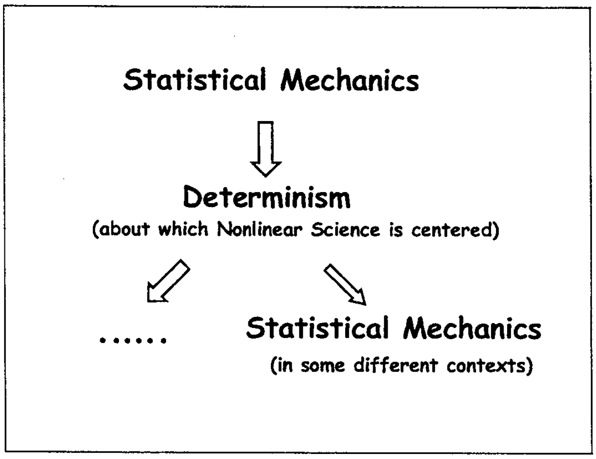
[Slide 5] さきほど触れたような自己組織化現象．それは熱ゆらぎとかとはいっさい関係のないマクロスケールの現象だということは，誰が考えてもほとんど明らかです．でもそれは非常に魅力的な現象で，そうした現象はほかにもいろいろあって，そういうものを本当に知りたいのに統計力学と言ったところで何もできないのではないか，それが僕の率直な感じでした．

決定論でなければ駄目だとみんなわかっているのに，何となくそれを認め渋るような雰囲気，それがあったように思います．それはどうしてかというと，やはり決定論というのは物理学者は慣れていないわけです．僕はまだ若かったから，物理のバックグラウンドはそれほどなかったけれど，それでも一応二次相転移の理論とかをやってある程度統計力学の手法や概念を身につけていました．そういうものがぜんぜん役に立たない世界に入らなければならないということはやはり辛い．僕でさえそうだったのに，僕より一回り二回り上の，もう確立された自分をしっかり持っていらっしゃる世代にそういうものを捨てさせるというのはできないですよね．捨てようという気になれない．僕は今それがしみじみかわります．そういう気持ちになるのは当然です．そうした心理的抵抗

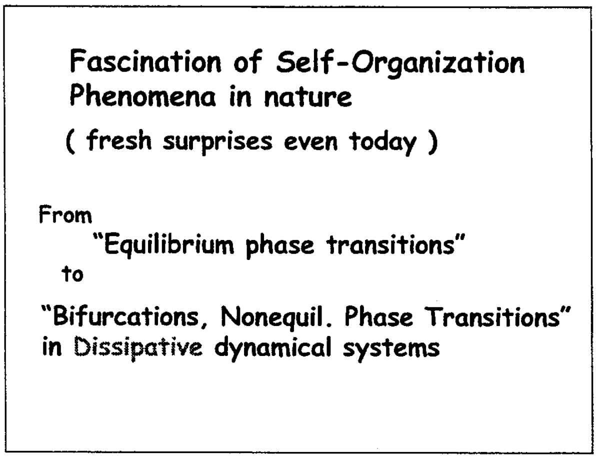
感が当時あったと僕は思っています.

[Slide 6] それから数年後ですか，1976年から77年にかけてでしょうか，カオスという旋風が吹き荒れました．実は輸入されました.「輸入」と言ったら叱られる．実はカオスはローレンツ以前に日本で発見されていたんだと主張する人もあるのですが，その話はまた.

それまでは統計力学，統計力学，ゆらぎ，ゆらぎと言っていた人たちが決定論の世界になだれを打って移っていきました．これはどうしてなのか．わからないわけではないのですが．ともかく，カオスの法則というものは，揺らぎとかなんとかごちゃごちゃ言っていたのではどうにもならないような，決定論的力学系に基づかないかぎり明らかにならないような，そういう法則です．それはある意味で揺らぎなのですが，普通の意味の揺らぎを否定して初めて新しいタイプの揺らぎがわかるという，二面性を含んだ揺らぎです．このように，大挙してカオスに入るという状況になると，決定論というのは大手を振って歩けることになる．もはや何か変なことをやっているとは思われなくなった．決定論が市民権を得たといっても良いかと思います.



[Slide 7]



[Slide 8]

[Slide 7] そういうわけで,「統計力学」と言いつつも全体の雰囲気としては決定論が公認された感じになって，その後非線形科学というものがあるピークを迎えるわけです.

面白いのは，最近まだ統計力学への回帰現象というものがあることです．それにはいろいろな側面がありますが，ある意味で統計力学が復活している．この事実に少し関連するのですが，今述べたような，統計力学から決定論への移行過程で，私が少し引っかかった問題があります．それはあとで少し立ち入って説明しようと思っているのですが，いわゆる非平衡系でのマクロな不安定化現象，あるいは分岐現象と言っても良い，そこで生じる揺らぎというものは相転移現象での臨界揺らぎのように異常増大しないのか．揺らぎが異常増大して新しい秩序状態，新しい構造ができるのではないか．揺らぎをきちんと考える必要はないのか．相転移の統計力学をやっていましたから，やはりそれは気になるのです．その問題はクリアしなければという意識はありました．それは非平衡定常状態での揺らぎの問題です．これを真剣に考えればいろいろ深い問題につながるんだと思うのですが，当時はやはり具体的なごちそう（魅力的な現象）が目の前にあって，それを説明したいというモチベーションがすごく強いわけですから，揺らぎの問題はあるていどなっとくできるていどに理解しておけば良いと．その上で決定論をやるという雰囲気でした.

ですけど，今一段落した段階で，その非平衡定常状態の統計力学というものをもう一度きちんと考え直そうという空気があると思います．そういう文脈での統計力学の復活ということが一つあります.

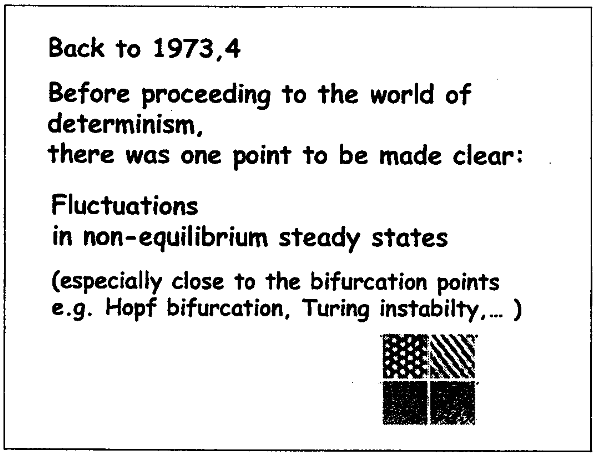
それと，決定論的なアプローチ自身から出てきた統計力学の問題として，カオス的な揺らぎの統計力学やフラクタルの統計力学というものもあります．それらと関連して自己相似揺らぎの統計力

学というものが一つの大きな流れとして出てきています.

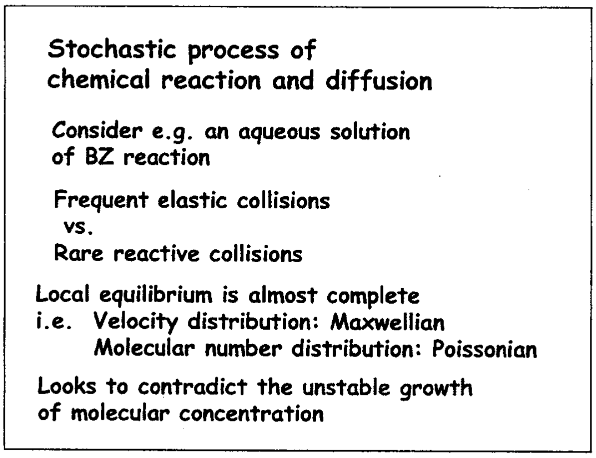
スライドのこの矢印で示した分岐図ですが，これは決定論を中心にもつ非線形科学が分岐によって変貌したということを示しているわけでは必ずしもなくて，非線形科学の扱う範囲が非常に広がって各分野に浸透しつつあることも事実なので，それを大きくわければこれら二つの流れになるのでは，ということを示しているだけです.

[Slide 8]

私が思うに，近年の物理はこれまでマクロな現象，われわれの感覚で捉えられるような世界の現象をあまり扱ってこなかったと思います．かなり軽んじられたということがあると思います．そういうマクロ世界では，熱力学第二法則に見られるように秩序構造は消えていく，動きは止まっていくという抗しがたい法則があるわけですが，その一方で形のないものから形ができ動きのないところから動きが現れるという逆の過程もあるわけです．物理はやはりもう少しその問題を真剣に考えるべきだというのが 1970 年代初めの Ilya Prigogine の考えであり，それに影響された私の考えでもありました．相転移もある意味で秩序形成現象ですから，その意味で興味をもったのですが，非平衡状態にいくとさらに豊富な自己組織化現象があることがわかってきました．したがって，力学系モデルによってそれを扱うとなると，それは散逸を含んだ散逸力学系が主たる関心の対象にならざるを得ません．非線形科学やカオスの分野ではもちろん保存力学系をもっぱら扱う人も多いですが，自己組織化現象に対する興味からすれば散逸力学系に興味が向くのは自然です.



[Slide 9]



[Slide 10]

[Slide 9] 1970 年代の初め頃の話に帰りますが，さきほど申し上げたように，決定論の世界に足を踏み入れる前に気になったことが一つあります．これは数年前に私の最終講義でもちょっと触れましたが，それ以外には触れたことがないのでここで繰り返したと思うのですが，それは非平衡定常状態における揺らぎの問題です．たとえば，さきほど触れた化学反応系で言いますと，たとえばここに示したようなチューリング・パターンと呼ばれるパターンがある．縦棒で示したバーが 1 ミリのスケールの現象なのですが，それゆえ非常にマクロなパターンです．ちなみに，この濃淡模様はある物質の濃度差を表しています．フラットな状態が不安定化してマクロスケールでこうした構造が自発的に現れるのですから，これは相転移的な現象です.

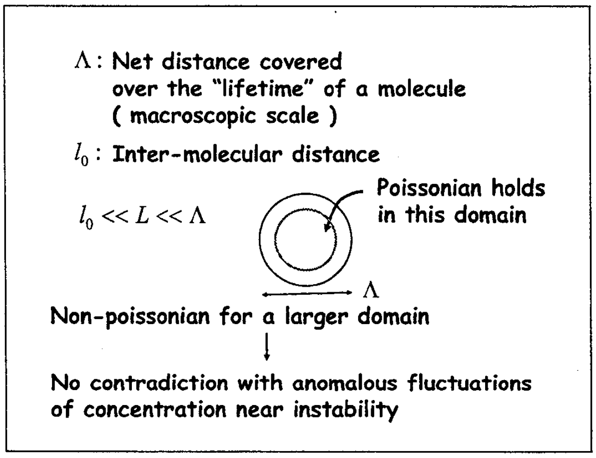
その不安定点のぎりぎりのところでは揺らぎはいったいどうなっているのか．濃度揺らぎはかならずあるわけですから，それが不安的増大して濃度パターンへと秩序化するわけで，そのような揺らぎに対して繰り込み群とかそういうことを考える必要があるのかどうか，普通の臨界現象と違うのか，違うとすればどう違うのかということをクリアしないと，そうすんなりと決定論の世界に入っていけない．そういう事情がありました.

[Slide 10] この問題を私は簡単な stochastic model，反応と拡散の過程を含む noisy な系のモデ

ルで考えました．最初のほうのスライドでパターンをお見せした Belousov-Zhabotinsky 反応，あのような反応系は水溶液中の反応で，反応物質自体は非常に希薄で理想気体と見なせます．ですから，反応物質分子が互いに衝突して反応を起こす頻度は非常に低く，それよりもそれらが媒質の水分子と衝突する確率，すなわち反応に関係のない弾性衝突の確率ははるかに高い．弾性衝突が支配的だから系は平衡状態に非常に近い．非平衡系の典型のように考えられている BZ 反応系もその意味では熱平衡にごく近いシステムです．速度分布はほとんど正確に Maxwellian だし，反応物質の分子数の分布，ある体積に含まれる分子数はほぼ Poissonian にしたがっているはずです．しかし，Poissonian なら濃度は完全に安定ではないか．分散は全然発散しないではないか．そこに絶対的な矛盾があるように感じたわけです．その（見かけの）矛盾はどうやって解決できるかという問題なのですが，これに対しては Ilya Prigogine がある説明を提案しました．僕はその説明には納得できませんでしたが，このことは最終講義のときに言ったので今日は述べません．むしろ，Prigogine から刺激されたことをここで申し上げたい．

Inspired by I.Prigogine's comment
at Statphys 11 ,Chicago, 1971
(Proceedings: ed. S.A.Rice et al. 1972)

[Slide 11]

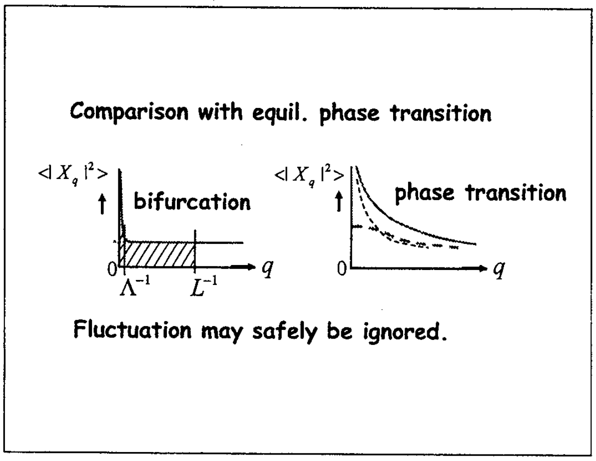


[Slide 12]

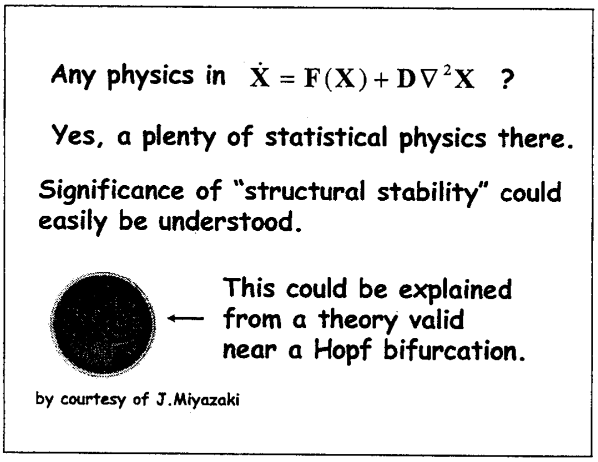
[Slide 11] 1971 年，シカゴで開催された統計物理の題 11 回国際会議，そこで Prigogine がディスカッションの中で発言していることがまさに今私が述べたことです．つまり，BZ 反応のような溶液中の反応では，弾性衝突が支配的で reactive な衝突は非常にまれであること，したがって分布は常に Poissonian と考えて良いと．しかも，ではどうして不安定化が起こるのかというのは彼なりの理屈があって，その部分はおかしいんだけれど，弾性衝突と reactive な衝突では頻度に極端な差があって，だから Poissonian 云々，そこにだけ私は触発されて，自分なりにその後の考えを進めていったわけです．

[Slide 12] 結局何がわかったかというと，ある特徴的な長さというものを定義する必要があるということ．それはどういう長さのスケールかというと，反応物質分子がコツコツと弾性衝突を繰り返しながら稀に reactive な衝突をするというとき，最初 reactive な衝突をして次に reactive な衝突をするまでに分子がランダム運動をしながら移動する実質の距離（直線距離），どの程度の距離だけ diffuse したら次の reactive collision が起こるかという，reactive collision 一回あたりの実質の移動距離が重要な特性距離になる．これを Λ とします．net distance covered over the "lifetime" of a molecule ですね．これが重要なスケールになって，BZ 反応などではマクロスケールになるわけです．さきほどのチューリング・パターンでも 1 ミリとか，そんなスケールになるのです．それと，もう一つの特性スケールは（反応物質の）分子間平均距離です．これを l_0 とします．希薄になれば両スケールとも長くなりますが，両者の比もいくらでも大きくなる．ですから，非常に多くの反応物質分子を含んでいながら Λ よりもずっと半径の小さい領域が十分希薄な場合にはあるわけです．l_0 と Λ の中間に広大なスケールの領域がある．そういう領域内でみると分子数の分布はほとんど

Poissonianになっている，というわけです．簡単なモデルで計算すると実際そうなります．けれどもΛを超えるような大きな領域，そういう領域内で分子数の分布を見ると，一般にPoissonianからずれる．不安定化が起こるところではそれが極端にずれ，いわゆる揺らぎの発散と矛盾しない結果になります．



[Slide 13]



[Slide 14]

[Slide 13] この事情を通常の相転移での臨界揺らぎと図式的に比較しますと，こうなります．臨界揺らぎでは，短いスケールから，ミクロ領域から秩序がどんどん発達してくるわけです．それがどんどんlong rangeになっていく．しかし，化学反応での不安定化はそうではなくて，ミクロとマクロの間の広大なスケールの世界ではまったくと言って良いほど熱平衡と同じ．外部の世界では何か変なことが起こっているけれども，中間の広大な世界で見ると何ら熱平衡と変わっていないということです．

変なことが起こっているのは，ものすごくlong scaleの，Λ^{-1}よりも小さなごく端っこだけ．不安定点では，ここで揺らぎが発散するのは確かです．ですから，原理的，理論的にはたしかに発散する．けれども，このような，あるドメインの中の揺らぎの大きさというものは，この斜線部を積分したものですね．その面積というものは，この水平部分を$q=0$までまっすぐに延長した場合とほとんど変わりません．その意味で，不安定化が起ころうが起こるまいが，分子数の揺らぎはPoissonianだと言って差し支えないのです．

ですから，ここでは揺らぎの繰り込みとかという問題はいっさいない．相転移の理論で言えば完全に古典論で十分ということです．そんなわけで，一応この問題は解決がついたので，安心して決定論の世界に入っていったということです．

[Slide 14] そうすると，ここにはもう統計力学は何もないのかということになるのですが，実はそうではなく，ここには豊富な統計力学があるというのが今日述べたいことだったのです．

第一に，僕は統計力学というものをごく広く解釈しています．確率論的なものがあるから統計力学だとか考えていなくて，ユニバーサリティということが統計力学の真髄だと思うのです．特に相転移の統計力学などをやっていますと，非線形科学におけるたとえば「力学系の構造安定性」などという現象横断的な，ユニバーサルな概念がすんなり受け入れられる．構造安定性とは何かというと，あるシステム，ある力学系の性質をほんの少し変えてもその定性的な振る舞いは変わらないという性質です．熱平衡系で言えば一つの「相」，液相とか気相とかが一つの構造安定領域で，相転移点は構造不安定な状況に対応しています．非平衡系はいわゆるbifurcation point（分岐点）が構造不安定点で，そこでは力学系の性質をわずかに変えても定性的な変化が起こる．

複雑現象の世界を理解しようとする場合，細かいことをごちゃごちゃ議論してもなかなかわからないので，何か定性的な変化が起こる節目節目，そういうところに着目していくことがまず必要だ

と思います．そういう意味で構造安定性というものは複雑世界を理解するための非常に基本的な概念的枠組みの一つだと思います．それはカタストロフィー理論で知られるルネ・トムの自然学観でもありましたが，非線形科学ではカタストロフィー（勾配力学系の分岐）を含むより一般の分岐理論として具体化していくわけです．

構造安定性の考え方を，たとえばさきほど示した BZ 反応の標的パターンの説明に適用することができます．まず，このような一般的な微分方程式をいきなり解析することはほぼ不可能です．反応拡散モデルと標的パターンとの距離はその意味で非常に遠い．そこで，この系が構造不安定になる分岐点に着目します．振動する化学反応系の場合にはいわゆる Hopf 分岐点です．分岐点を境にして，定常相という一つの構造安定相から振動相という別の構造安定領域に入る．入ってすぐのところに着目するのです．この構造安定領域で見られる現象は，定性的な側面に関する限り分岐点の近くであろうと遠くであろうとそれほど変わりはないだろうと期待できます．そうすると，分岐点という特殊な状態の近傍で調べるだけで相当のことがわかる．非線形性がまだ弱いそうした状況なら，縮約理論を用いて方程式を縮約することができるだろう．一種の情報圧縮による法則の単純化です．縮約された方程式に基づいてならばこのようなパターンも何とか理解できるのではないかという考えに至ります．

Reduction of $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) + \mathbf{D}\nabla^2\mathbf{X}$

to $\dot{A} = (\omega + i\omega_1)A - \alpha\,|A|^2\,A + \beta\,\nabla^2 A$

(complex GL eqn.)

method borrowed from
Newell-Whitehead work ('67)
on the Rayleigh-Bénard convection

I knew well the significance
of reduction to GL free energy
in physics

[Slide 15]

Pattern dynamics of self-oscillatory fields

Its thorough understanding has been
achieved by means of the complex GL
and its many variants.

The power of "universal equations"
is great.

Reduction theory as a backbone
of nonlinear non-equilibrium
pattern dynamics

[Slide 16]

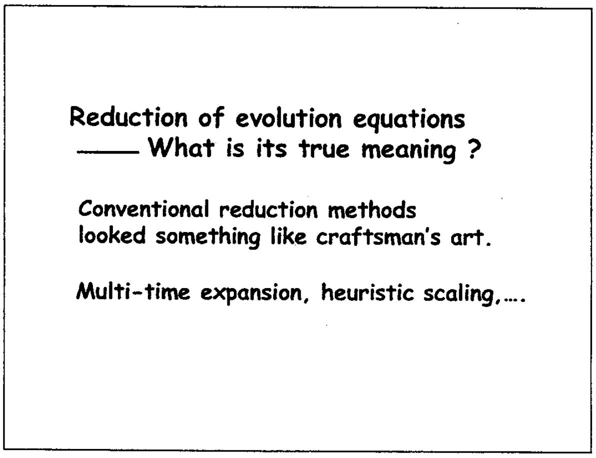
[Slide 15] その考えにしたがってやってみると，ごく一般的な反応拡散方程式が複素 Ginzburg-Landau 方程式という具体的な方程式に化けることがわかります．このような縮約の考え方は，化学反応系以前に流体力学のほうで知られていて，19 67 年に Newell と Whitehead という人が熱対流，レイリー・ベナール対流現象で同様の縮約方程式を導いていました．私は都築（俊夫）さんと一緒にその手法を真似して複素 GL 方程式を導出しただけです．でもこの縮約方程式はものすごく有効でした．その方程式にはいろいろな変形版がありますが，そういうものを通じて自励発振するシステム，結合振動子系のことがすごくよくわかってきました．縮約方程式がなかったら，元の力学モデルだけだったら，理解は非常に遅れていたでしょうね．

それともう一つ重要なこととして，縮約方程式自体はたとえ元のモデルの詳細がわからなくても，つまり $F(X)$ の具体的な形がわからなくても，ある一般的な条件さえ満たされれば分岐点の近くで複素 GL という唯一の具体的な形に帰着する．こうしたユニバーサルな事実は，単に縮約方程式の形が比較的簡単だから扱いやすいというメリット以上に重要なことです．

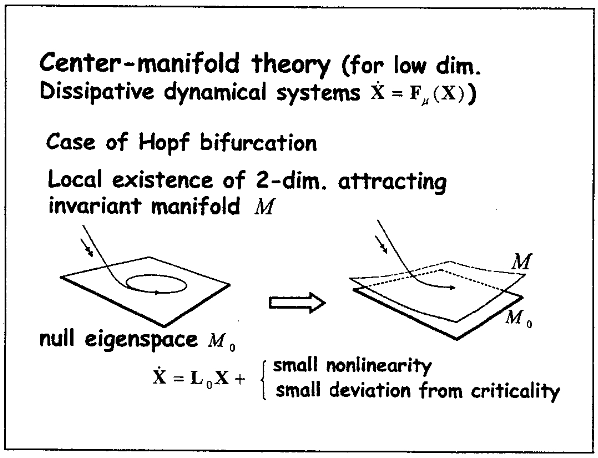
統計力学でもユニバーサリティは同様に重要で，その点で非線形科学と統計物理は親近性をもっている．対象とするものを構成する物質的な素材がどれほど違っていても，共通の数学的構造がそこにありうる．そういうものを引き出してこないととても複雑な世界のことはわからないという考えが統計力学にもあったし，もっと拡大された形で非線形科学でも意識されていると言えます．そ

の象徴的存在が縮約方程式です．Ginzburg-Landau の自由エネルギーという形に縮約された系から相転移のことや超伝導のことがいろいろわかるという事実を知っていれば，このような非線形科学の考え方もすんなり受け入れられます．

[Slide 16] このスライドはすでに今述べたことの繰り返しです．ところで，縮約を具体的にどのように実行したかということですが，私と都築さんは Newell-Whitehead の手法を単に真似してやっただけで，結果に対しては疑いをもっていなかったのですが，縮約というものでそもそも何をやったことになっているのかということは，よく考えてみるとそれほど明らかなことではない．当時は具体的な現象のほうを理解したいということが先立って，理論としてはこの程度で良いだろうくらいにしか考えずに先に進んだのですが，一段落して振り返る時期になると，縮約の理論的根拠は何か，解の摂動展開ではない方程式まるごとの摂動論とは何だろうと考えてしまうわけです．それで，これを少し真剣に調べはじめたのです．そのことに関連して，後に大野さんや国広さんらが繰り込み群の方法を用いて同様の考察をなさっています．私は別の立場を取っていますが，ここでは私の立場から少しお話したいことがあります．



[Slide 17]



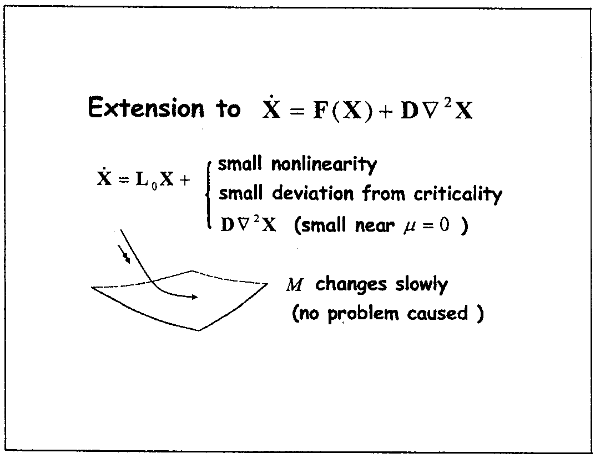
[Slide 18]

[Slide 17] 縮約と称していったい何をやっているかということですが，テクニカルには特に珍しいことでもなくて，さきほども流体力学では古くからあると言いましたが，他の分野たとえば工学でも数理生物学でも似たような手法はあるのです．そこでやっているのは，あるいはソリトン方程式を導く谷内（俊弥）さんの方法も似た面がありますが，multi-time expansion とか，いろいろな物理量に対して天下り的なスケーリング（微小な分岐パラメタに関する）を仮定する．一種の職人芸的なことをやってうまく縮約方程式を出してくる．そこをまじめに考えはじめると何をやっているのかさっぱりわからなくなる．

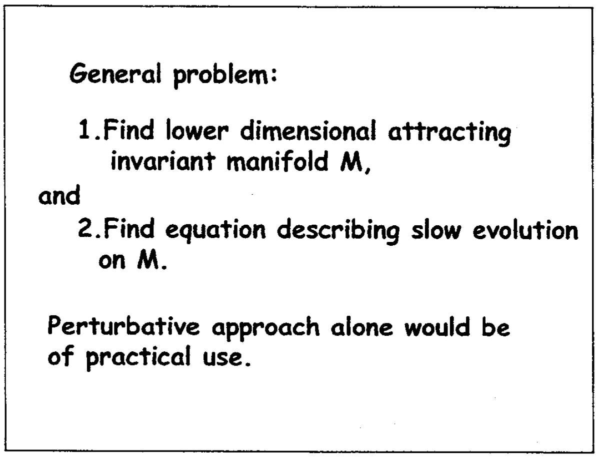
川崎（恭治）先生は覚えていらっしゃらないかも知れないですが，以前あるシンポジウムで縮約の話をしましたら，川崎先生が質問されました．縮約というのは力学系の自由度を消去するということがまずあるわけですが，自由度を消去すれば必ずその代償として一般に記憶効果が現れる．にもかかわらず，マルコフ的な，記憶効果のない縮約方程式が得られるのはなぜか，という質問でした．

[Slide 18] それを物理的に考えるとなかなかわからなかったのですが，数学のほうで center-manifold theory というものがあり，これを知るに及んでなるほどそうかと得心するところがありました．それはどういう理論かということですが，まずこの力学系で $F(X)$ は分岐点からの距離をあらわす μ というパラメタ（分岐パラメタ）を含んでいます．$\mu = 0$ が分岐点です．そうしますと，Hopf 分岐の場合を考えるとして，線形化した方程式はちょうど分岐点で 2 次元の臨界固有空間をもっています．固有値の実部が 0 の二つの固有ベクトルで張られる固有空間です．分岐点では系は

その面上で一種の調和振動を行っている．面外に初期点をとると，それはたちまちこの面に漸近してその上で調和振動する．調和振動だから振幅は不定です．成長も減衰もない，ちょうど臨界状況にあります．center-manifold 理論というのは，数学的な言葉を用いないで非常に大雑把な言い方で恐縮ですが，こういうことです．この線形システムに弱い非線形性が入る，さらに臨界点からの小さなずれの効果も考慮する．そのように小さな摂動を受けると，もとの線形力学系の性質が少し変化する．そうすると，この 2 次元臨界空間，それは線形システムの不変多様体の一つですね，すべての状態点を引きつけるので安定多様体ですが，不変多様体がすこし変形を受けると考えられます．摂動を受けたシステムの不変多様体です．そして，系の時間発展はその新しい不変多様体の上で行われる．それはもはや振幅不定の単なる調和振動ではなく，振幅が非常にゆっくりと変化する運動でしょう．摂動を受けてもこのような attracting な 2 次元の不変多様体が局所的に存在するというのが center-manifold 理論です．center-manifold を摂動論的に構成して，その上での (マルコフ的な) 発展方程式を求めるというのが縮約理論が実際にやっていることだとようやくわかったのです．



[Slide 19]



[Slide 20]

[Slide 19] いまのは有限次元の力学系の話でしたが，さきほどのような拡散項を含む反応拡散方程式の場合にはどうなるのか．その場合系は無限自由度です．無限個の空間自由度をもつわけで，数学の人はその場合の縮約がどうなるのかに悩みます．無限次元力学系の縮約問題です．

しかし，僕は問題をそのように難しく考えないで，その場合でも有限次元力学系の問題として捉えたいのです．それはこういうことです．さきほどは非線形効果と臨界点からのずれを微小な摂動と考えましたが，それに加えて拡散項も微小な摂動と見なすのです．(拡散項が実際微小であることは，数学的というよりも物理的な考察から事後的に正当化されます.)

これら三種類の摂動はすべて一個の局所的な振動子に働くわけですから，問題は有限次元にとどまります．摂動が 2 次元不変多様体をどのように変形させ，その上での発展方程式が調和振動の方程式からどのようにずれるか，それを摂動論的に構成する問題だと考えたわけです．この考えは結果を見るかぎりおそらく正しい．数学的にはいろいろ難しいことがあると思いますが，物理的になっとくできる範囲では OK だと思います．

拡散項のようなものが摂動に入ってくるわけだから，摂動による不変多様体の歪みというものは着目する局所振動子に隣接する振動子がどんな状態にあるかにも依存することになる．数学的には状態変数 X だけでなく X のさまざまな空間微分をも一種のパラメタとして含む不変多様体になるということです．だから当然時間的にもゆっくり変動する多様体です．そういう奇妙な不変多様体なのですが，摂動論を進める上でテクニカルには特に問題はないということがわかって，その結果さきほどの複素 GL 方程式導出の根拠があきらかになりました．

[Slide 20] いまの話は分岐点近傍での縮約についてだったのですが，数学的にはもっと一般的な問題が考えられていて，一般のN次元散逸力学系で，それよりも次元の低いattractingな不変多様体の存在に関する議論があります．状態点はまずこの多様体に吸引され，その上に乗ったら永久にそこを離れることがないわけですから，過渡状態をのぞいて力学系の次元が一般に低下することになる，そういう重要な事実に関する数学です．具体的なモデル方程式について，そのような不変多様体が実際に存在するか，その次元の上限が何によって押さえられるかとか，そのような議論がいろいろあるわけです．けれども，そういう数学理論はあまりものの役に立たなくて，やるとすればやはり摂動論的に不変多様体を構成し，その上の発展法則を構成するというのが最も実際的だと思います．

quick approach to M: τ_1
vs.
slow evolution on M: τ_2

$\tau_2 >> \tau_1$ ⟶ perturbation theory applicable

Unperturbed system must have some neutral modes (with $\tau_2 = \infty$)

Critical modes at bifurcation represent a universal class of neutral modes.

[Slide 21]

Perturbation expansion of $\dot{X}$ rather than X

$$X(t) = \sin\left((\omega + \varepsilon\omega_1)t\right)$$

$$X(t) = \sin(\omega t) + \varepsilon\omega_1 t\cos(\omega t) - \frac{1}{2}\varepsilon^2(\omega_1 t)^2\sin(\omega t) + \cdots$$

vs.

$$X(t) = \sin\left(\omega t + \psi\right), \quad \dot{\psi} = \varepsilon\omega_1$$

[Slide 22]

[Slide 21] center-manifoldの考えを離れて，一般に力学系の次元を摂動論的に縮減できる条件は何かということを考えてみます．摂動論を用いるには微小パラメタがなくてはならない．何が摂動パラメタになるかというと，結局不変多様体に近づく時間スケール τ_1 と，不変多様体上の遅い時間発展に関係した時間スケール τ_2 の比しか考えられない．それらの間に圧倒的な差があるという場合に適用できる摂動しか考えられないわけです．τ_2 が無限大になるような，安定でも不安定でもない中立安定的な力学的状態，それが摂動の出発点，非摂動系にならなければならない．ところが，中立安定性をもった物理的なモードというものは一般にどういうものが考えられるかというと，種類は非常に限定されるわけです．

一つはすでに述べたように，分岐点での臨界モードです．ジャスト分岐点，そこを基点にして摂動論を作る，それがさきほどの縮約理論です．

[Slide 22] それ以外はどうかという話の前にちょっと触れたい重要なこととして，さっきのような摂動論，τ_1/τ_2 に関する摂動論は，「解」の摂動展開ではないという点です．解を摂動論的に求めるのではなく，解のドット（時間微分）の摂動展開です．いわばベクトル場に対する摂動論です．たとえば，弱非線形振動の漸近理論の説明のはじめによく出てくる事柄ですが，ε という微小パラメタがあるからといってこのような時間周期解を単純にべき展開しますと，tはいくらでも大きくなりますから ε がいくら小さくても，時間の全領域で一様収束しません．

しかし，これ $(\varepsilon\omega t)$ を位相 ψ と見て，ψ のドットに対する摂動だと見ると，一次摂動でexactです．このように，解に対する摂動を考えると永年項の除去とかそういうややこしいことを言わなければならないけれども，解のドットに対する摂動ならものすごく単純な摂動論であって，繰り込みとか無限個の展開項を丸め込むとか，そういうことをいっさい考えなくて良いわけです．そういう単純な摂動論を採用するほうがずっと効率的だろうと思うわけです．

PHASE :
Another universal class of neutral modes

Corresponding reduction theory:

PHASE REDUCTION

Breaking of continuous symmetry

[Slide 23]

$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \Longrightarrow \mathbf{X}_0(\omega t)$

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0(\phi), \quad \phi = \omega t + \psi$$

$$\dot{\mathbf{X}}_i = \mathbf{F}(\mathbf{X}_i) + \varepsilon \sum_{j=1}^{N} \mathbf{K}_{ij} \mathbf{G}(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j)$$

$$\Longrightarrow \mathbf{X}_i = \mathbf{X}_0(\phi_i) + \varepsilon\, \underline{\boldsymbol{\rho}}(\phi_i, \{\phi_j\}_{j \neq i}; \varepsilon),$$

$$\dot{\phi}_i = \underset{\omega_i}{\underset{\downarrow}{\omega}} + \varepsilon \sum_{j=1}^{i} \underline{\Gamma_{ij}}(\phi_i - \phi_j) + O(\varepsilon^2)$$

generalization possible

Relevance to biological rhythms, robot,...
Decentralized autonomous control

[Slide 24]

[Slide 23] 自然界に存在する中立安定なモードというものの種類は限定されるとさきほど言いました．分岐点で現れる中立モード以外にもう一つ代表的な中立モードとして位相というものがあります．これはシステムがもともと持っていた連続対称性が自発的に破られるときに現れる物理量なので，素粒子物理学からマクロな散逸力学系まで非常に普遍的に現れるモードです．

[Slide 24] たとえば，ある autonomous な力学系が自励発振している．それは時間に関する併進対称性を破った状態です．ですから発振状態を表すとき必ず位相という中立安定な量が現れます．一般に位相をテコにした摂動論，これが位相縮約と呼ばれるものです．位相縮約はたいへん強力な理論です．私はこれまで結合振動子系，自励振動場や結合振動子集団のダイナミクスを主にやってきたのですが，位相縮約，位相記述の強力さをつくづく感じます．

リミットサイクル振動子系に位相縮約法がどのように適用されるかですが，このような振動子がカップルした一般のシステム，振動子ネットワークを考えます．それを位相縮約すると ϕ という位相だけでこのように書ける．もちろん，そこには結合が弱いという条件が必要ですが，振幅が消去されて位相だけで書けるということになります．

このような，位相だけで書かれた振動子ネットワークのモデルは，現在いろいろな方面で用いられています．生物リズムとかロボットとか，自律分散的な情報処理を行うさまざまな振動子系でこれが使われているということです．

$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \Longrightarrow \mathbf{X}_0(\omega t)$

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0(\phi), \quad \phi = \omega t + \psi$$

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) + \mathbf{D}\nabla^2 \mathbf{X}, \quad \nabla \to \varepsilon \nabla$$

$$\Longrightarrow \mathbf{X}_i = \mathbf{X}_0(\phi(\mathbf{r}, t)) + \varepsilon\, \underline{\boldsymbol{\rho}}(\phi, \nabla\phi, \nabla^2\phi, \cdots),$$

$$\dot{\phi} = \omega + \underline{\Gamma}(\phi, \nabla\phi, \nabla^2\phi, \cdots)$$

I called $\mathbf{X}_0(\phi(\mathbf{r}, t))$ **"local equilibrium"**

in Synergetics Proceedings, ed. H.Haken, '77

[Slide 25]

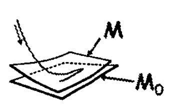
Strong similarity
with the **<u>Chapman-Enskog theory</u>**

(neutral modes: conserved quantities)

$$\underline{\frac{\partial f}{\partial t} = J(f)} - \underline{\left(\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) f}$$

$$f_0 = \underline{n}\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m|\mathbf{v}-\underline{\mathbf{c}}|^2}{2k_B \underline{T}}\right) + \underline{\delta f}$$

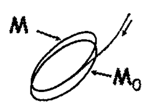
$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{c}, T, n) = \underline{\Gamma}(\mathbf{c}, \nabla\mathbf{c}, T, \nabla T, \cdots)$$



$$\underline{\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X})} + \underline{\mathbf{D}\nabla^2 \mathbf{X}}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0(\underline{\phi}(\mathbf{r}, t)) + \underline{\rho}$$

$$\dot{\phi} = \omega + \underline{\Gamma}(\phi, \nabla\phi, \nabla^2\phi, \cdots)$$



[Slide 26]

[Slide 25] 離散的な結合振動子系ではなく，再三触れたような拡散で結合した連続振動場にも位相方程式，位相縮約というものは適用できて，このように位相に対する偏微分方程式が得られます．

位相縮約のやりかたはごく簡単です．これがリミットサイクル解で，それは ωt プラス任意の位相定数 ψ の周期関数（周期 2π）です．摂動として拡散が入ると，解ももちろん変化するのですが，近似的にはその形はリミットサイクル解と同じで，ただ任意定数とされた ψ がもはや定数ではなくゆっくりとした時空変動をもつ変数に化けると考えるのです．そのように考えて，摂動方程式をできるだけよくみたすように ψ が従う運動方程式を決めてやる．それが基本的なアイディアです．

しかし，実際にはこの関数形では決して現すことのできない微小なずれが必ず出てくる．それを ρ で表しています．それは不変多様体の歪みに対応しています．ψ または $\phi=\omega t+\psi$ の運動が歪みを受けた不変多様体上の運動を表しています．したがって，ρ と $\dot{\psi}$ が摂動的に求めるべき二つの基本量です．

この表式 $(X = X_0(\phi) + \varepsilon\rho)$ を $\dot{X}$ の式に代入して，ρ と Γ を逐次代入的に求めるというのが一般的なやり方なのですが，この X_0 を 1977 年のあるワークショップで私は無意識に local equilibrium（局所平衡）状態と呼んだのを思い出します．これは今にして思えば十分に意味のあった言及だと思います．

[Slide 26] なぜそんなに意味のあることなのか．これは以前基研 50 周年シンポジウムの講演でも少し話したことなのですが，ボルツマン方程式の縮約問題と関係しています．気体運動論のボルツマン方程式を流体力学方程式に縮約するという Enskog-Chapman 理論，1916~ 1917 年頃の非常に古い理論です．位相縮約と呼んでいるものが，それとほと同じ構造をもっているということわかってきました．それで，そういう対応からすれば，さきほどの X_0 はまさに局所平衡分布と言えるのです．

どのような対応があるかというと，たとえばこの反応拡散方程式，リミットサイクル振動子が拡散結合しているというシステムですが，これにボルツマン方程式が対応します．ボルツマン方程式の解，つまり時空依存の速度分布関数，これが同じく時空依存の反応拡散系の状態ベクトル X に対応します．ボルツマン方程式は平衡解として Maxwell 分布をもっています．空間的には一様です．ただし，系の全運動量は保存されますから，全体は任意の速度 $\boldsymbol{c}$ で並進運動していてもよい．それと，温度 T と平均の分子数密度 n，これら 3 つの任意パラメタが Maxwellian には含まれる．$\boldsymbol{c}$ はベクトルだから 5 つの任意パラメタというべきか．

ともかく，複数の任意パラメタをもった平衡解というものがある．空間的に一様だから streaming term は効いていません．ボルツマン方程式の縮約において何をやっているかというと，これらの任意パラメタを定数と見ないで，ゆっくりと時間的空間的に変動する変数と見なすことで，平衡解を拡張してもっと一般的なボルツマン方程式の解を求めようということです．streaming term が摂動になってこれらの任意パラメタにゆっくりとした運動を引き起こすのです．

時空依存なパラメタを含む Maxwellian を局所平衡分布と呼んでいますが，どんなに平衡に近くても，非平衡である限り分布関数の関数形はわずかながらも Maxwellian から外れる．そのずれを δf とします．時空依存パラメタ $T, \boldsymbol{c}, n$ の運動方程式，それがとりもなおさず流体力学方程式なのですが，それは局所平衡に近いとされたこの分布関数が最大限ボルツマン方程式をみたすように決められます．

反応拡散方程式の位相縮約はこれとパラレルです．リミットサイクル解が局所平衡に対応しています．拡散の効果が steaming term の効果に対応する．この摂動があるためによってリミットサイクル軌道から一般には少し外れる，それを ρ とするとこれは δf に対応しています．位相方程式が流体力学方程式に対応しています．位相方程式と ρ を摂動論的に求めるやり方は，流体力学方程式と δf を求める Enskog-Chapman のやり方とそっくりです．

ボルツマン方程式に対しては，速度分布の関数空間で平衡分布を表す 5 次元の空間 M_0 があります．5 つ任意パラメタを含むから 5 次元空間を張るわけです．これは非摂動系の attracting な不変

多様体で，これが streaming term という一種の self-perturbation によってわずかに歪んで，やはり5次元の真の不変多様体 M になる．そのときの歪みが δf です．M の上のゆっくりとした運動，それが流体運動です．

$$L\cdot\underline{\delta f}(\mathbf{v};\mathbf{c},\nabla\mathbf{c},T,\nabla T,\cdots)$$
$$=\underline{\boldsymbol{\Gamma}}(\mathbf{c},\nabla\mathbf{c},T,\nabla T,\cdots)\cdot\mathbf{u}(\mathbf{v})+\underline{\mathbf{B}(\mathbf{v};\mathbf{c},\nabla\mathbf{c},T,\nabla T,\cdots;\delta f,\boldsymbol{\Gamma})}$$

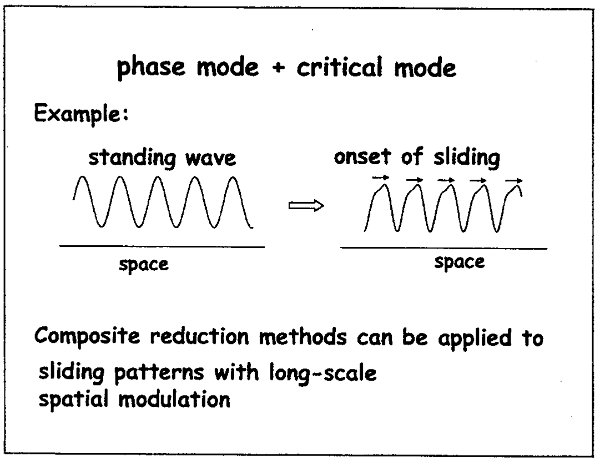
L :**linearized collision operator**

$L\mathbf{u}=0$ $\qquad\left(\mathbf{v}\dfrac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)f_0+\cdots$

Apply solvability condition, and find Γ and δf iteratively.

The phase reduction and center-manifold reduction have an identical mathematical structure.

[Slide 27]



[Slide 28]

[Slide 27] この辺はもうごちゃごちゃするから簡単に述べましょう．理論形式としては可解条件というものを使う，というか，可解条件そのものが流体方程式をあたえます．分布のずれ δf に対する式を一種の非斉次線形方程式（Fredholm 型積分方程式）と見て，それに対して可解条件を適用するわけです．ここで積分演算子は線形化された衝突演算子ですが，これが5つのゼロ固有値をもっている．平衡解が5つの任意定数をもっているから，その周りの線形系が5つのゼロ固有値をもつのは当然です．可解条件というのは，右辺の非斉次項がゼロ固有成分を持ってはならないという条件です．反応拡散系の位相縮約も今言ったことの単なる繰り返しです．結局は可解条件そのものが位相方程式になっている．

散逸を含む流体力学方程式，Navier-Stokes 方程式を出すには2次の摂動まで行かなくてはなりません．2次摂動と言うとごく初等的でつまらないように聞こえるかもしれませんが，前にも述べたように方程式の解ではなくて解のドット（ベクトル場）に対する摂動論なので見かけほど trivial ではなく，けっこう深い意味をもつものだと考えています．

[Slide 28] 分岐点の臨界モード，位相モード，それに保存量，これが自然界の代表的な中立安定モードだと思うのですが，ボルツマン方程式の縮約は保存量をテコにした縮約です．保存量はその値を任意にあたえることができて，放置しても変化しない，成長も減衰もしない．だから位相と同じように中立モードなのです．3種類の中立安定モードに対応して3種類の縮約理論がある．それはごく自然なことだと考えています．

位相縮約だけでも非平衡系のいろいろな問題に有効な方法をあたえますが，これに臨界モードという第二の中立安定モードが絡む現象があります．例えば，Turing 不安定性というものがあって，一様な空間パターンがさきほどの写真（slide 9）で見たように周期的な格子状の濃淡構造に変化するという現象があります．もし空間的な広がりが十分大きくて境界効果を無視できるなら，この不安定性によって空間並進対称性が破れますから，位相モードという中立安定モードが出てくる．パターンを任意に平行移動したものも解として同等の資格をもつということです．このように，すでに中立モードが存在している状況で，このパターンにが不安定化するという事態が起こりえます．たとえば，この対称なパターンが不安定になって，空間的に方向性をもつ非対称なパターンに変化する．と同時にパターンはゆっくりと滑り出す，そういう現象があります．これも一種の分岐現象なので，臨界モードが現れます．つまり系は二種類の中立安定モードをもつ．これらがカップルして新しい複雑なダイナミクスが現れる．それを記述するには二種類の縮約理論を組み合わせればよ

い．compositeな縮約理論です．それは可能です．このような組み合わせを含めると，非線形系のダイナミクスはやはり縮約理論がそのバックボーンになってさまざまに発展してきたと言えると思います．

（もう時間切れなのでやめましょうか．）

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) + \mathbf{D}\nabla^2\mathbf{X}$$

phase reduction

$$\dot{\psi} = -\partial_x^2\psi - \partial_x^4\psi + (\partial_x\psi)^2 \quad \text{(Y.K. '76)}$$

phase turbulence

$$\dot{\mathbf{X}}_i = \mathbf{F}(\mathbf{X}_i) + \varepsilon\frac{\mathbf{K}}{N}\sum_{j=1}^{N}\mathbf{G}(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j)$$

phase reduction

$$\dot{\phi}_i = \omega + \varepsilon\frac{K}{N}\sum_{j=1}^{i}\Gamma(\phi_i - \phi_j), \quad \text{e.g., } \Gamma(y) = -\sin y$$

(Y.K. '75)

synchronization transition

[Slide 29]

$$\partial_t\phi = -\varepsilon\,\partial_x^2\phi - \partial_x^4\phi + (\partial_x\phi)^2 + \partial_x\phi\,\partial_x^3\phi + (\partial_x^2\phi)^2 + \cdots$$

Scaling form:

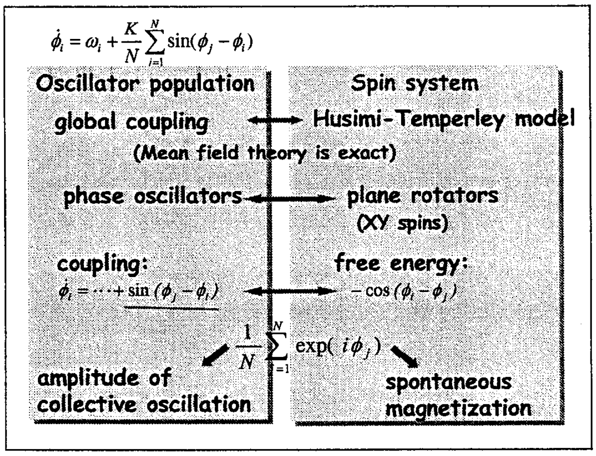
$$\phi(x,t) \cong \varepsilon\psi(\varepsilon^{1/2}x, \varepsilon^2 t)$$

Scale-invariant part is dominant:

$$\underline{\partial_t\phi = -\varepsilon\,\partial_x^2\phi - \partial_x^4\phi + (\partial_x\phi)^2} + \partial_x\phi\,\partial_x^3\phi + (\partial_x^2\phi)^2 + \cdots$$

$$\longrightarrow \quad \dot{\psi} = -\partial_x^2\psi - \partial_x^4\psi + (\partial_x\psi)^2$$

[Slide 30]



[Slide 31]

Bifurcation or Phase Transition ?

As a dynamical system,
the state of vanishing R is neutrally stable,
whereas R decays exponentially there.

Dominant measure of T^n are concentrated near R=0.

Analogy with the Landau damping in collisionless plasma (S.Strogatz)

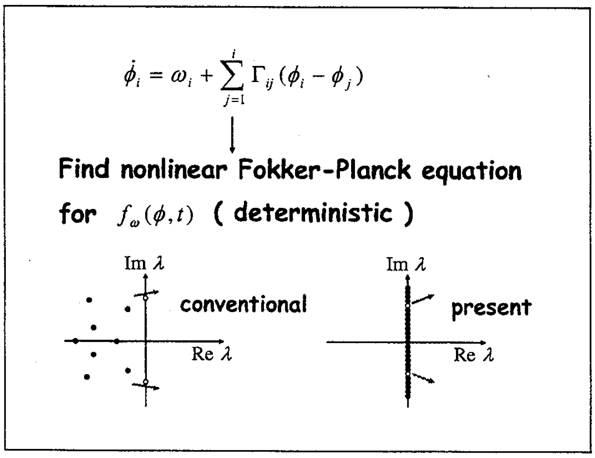
Regarded as a singular bifurcation (D.Crawford)

[Slide 32]

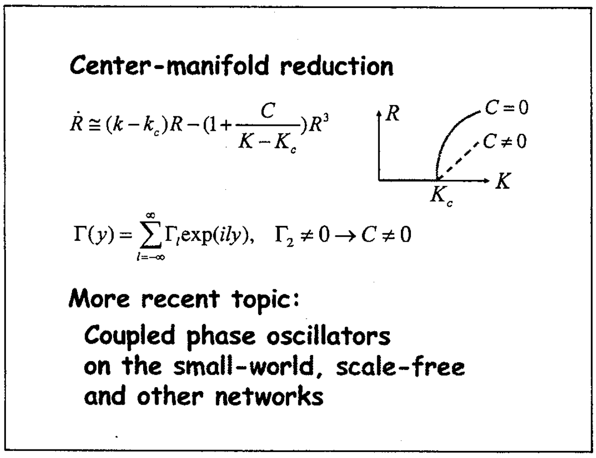
これまで述べたような縮約の考え方はまさに統計力学だと言ってよいと僕は思うのです．Enskog-Chapman理論が統計力学の歴史の中で記念碑的な仕事であるということもありますが，それだけではなくて，いろいろな違ったシステム，もとのシステムの実態がわからないような場合でさえ，縮約理論が成り立ち，縮約方程式が普遍的な形をもっているということ，そういう重要な概念は私がまさに統計力学から学んだことなのです．

invariantな構造，特に大きなinvarianceをもつ構造を見出すということが物理では非常に大切だと思います．物理はもう終わりだと，大野さんでしたか，言われる方もいますが，僕はそうは思っていないので．それと，いただいた資料に，「湯川先生の精神で，分野視野をどんどん広げていく」とありますが，あれもちょっと言い足りないと思うのです．偉そうなことを言って恐縮ですが，大きな不変構造を発見するのが物理の役割であり，それが続く限り物理も続くと思います．不変（invariant）は普遍(universal)に通じます．そのような構造を数理的な表現として発見する．それを徹底してやるのが物理だと言って良い．そうだとすると，扱う対象を広げるとか何とかというのはあまり本質的なことではない．非線形現象の科学を僕が物理だとみなすのはそういう立場からです．

invariant な構造にもいろいろあります．非線形科学や統計物理では，素材がものすごく違った対象を貫いて横断的に存在する invariant な構造を見出そうとする．それとは違って，物質を細かく分解して要素というものに着目する立場があります．要素というものも実に大きな invariance をもつ．同じ要素から多様多彩な物質が現れれ，多様多彩に振舞うわけですから．その方向で invariance を徹底的に求めるのがミクロ物理，素粒子論でしょう．しかし，後者だけが重要な invariance ではありえない．それだけを invariance と思うから，物理学を一本の大木，系統樹のようにイメージしてしまう．その根っこが素粒子で，そこから物質的多様性として枝葉が分岐してくる，というように．そういうイメージは廃棄されなければならないと私は思う．枝分かれしたもの，すごく多様化した世界に横断的な invariance がある．そこに着目しなければいけない．それは数理的に表現可能です．それを実証したのが非線形科学だと思います．だから，単一の樹木構造のイメージは根本的に変えないといけない．ではどういうイメージをもったら良いか，実はそんなにはっきりとしたイメージを僕はまだもっていません．かつて，知識構造としての物理学を日常言語の構造に対応させたらどうかと書いたことがあります．しかし，今日はこの話はしません．今日はもうすこし話そうと思っていたことがあるのですが，時間がないのでやめにします．ディスカッションにして下さい．



[Slide 33]



[Slide 34]

CONCLUSION:

I have argued
(through my personal experiences)
how statistical mechanical ideas work
in the study of
nonlinear non-equil. pattern dynamics
based on deterministic dynamical systems.

Thank you !!

[Slide 35]

早川：わかりました．どうもありがとうございました．ご質疑ご討論をお願いします．大野さんくらいから始めますか．

大野：物理が終わったということを私が言っているみたいに思われますけれども，蔵本さんがおっしゃっているのとまったく同じで，私見を言いますと，坂東さんからお話をしろと言われたときには，物理の将来について，だったんです．そんな！

だから素直に断ればよかったんですけれども，私はそういうことには関心はありませんと言ってしまったので，こういう羽目に陥ったのですけれども，関心がないという意味は，物理だ，物理でないというのに抵抗があるわけです．

私はいま，半分，生物のほうに足を突っ込んでいますけれども，生物の人から物理帝国主義だと思われているところはあるのですが，やっぱり対象にとらわれないで，数学的構造を見るというのが物理だと思います．物理の本義は，語源的に自然学なのですから，その精神に戻るということが基本だと思います．

蔵本：まったく同じですね．

大野：自分の弁明になってしまって，申しわけありません．

蔵本：反対の人はいますか．

早川：ほかに反対の人とか，いらっしゃいませんか．じゃあちょっと，テクニカルかもしれないですが，微妙に反対かもしれないという質問で，例えばChapman-Enskogでも，フェーズダイナミクスでもいいのですけれども，center-manifoldにinvariantな構造があって，例えばハイドロモードがあって，それに対する摂動という，リラックスするモードが分かれている．例えばChapman-Enskogだったら保存量があって，それに対して繰り込んで記述すればよろしいというのは，確かにそうなのですけれども，例えば高次項に進んだら，結局，ノンハイドロダイナモードが混ざってくる可能性があると．それから高次に進まなくても，多体相関が重要になってくるデンス系，ガスとか，それが非常に問題になって，例えば，摂動解が破綻する，しないとかいう話もあります．

そういった問題は，ある意味，蔵本先生の予定調和みたいな構造を壊しているので，それは物理かどうかということにかかってきますけれども．

蔵本：縮約理論にも当然限界はあるでしょう．縮約理論では，形式的に無限次まで摂動展開できますが，そういう定式化は可能ですが，高次項が本当に物理的な意味をもつかということは，意味をもつ場合も確かにあるということはわかっていますが，そうでない場合もあるかもしれない．Enskog-Chapmanでも高次項に関するあまりはっきりしない議論もあります．そこはちょっとわかりません．とにかく，縮約理論が万能というわけではありません．

早川：ほかのご質疑，ご討論．まだ時間はありますので．

坂東：ちょっと素人向けの話とは違ったので，わかりにくかったのですけれども，どういうことかというと，どういう現象があって，どういうなかにユニバーサリティを見出していたかというのは，あんまりイメージが湧かないまま，いきなり式が出てきて，縮約という話になったので，あんまりよくわからなかったのですけれども．

蔵本：具体例は最初示した一つだけというのがいけなかったかもしれません．こういう具体的な現象を理解したいという動機があって，そのためには縮約をやらなければわかりっこない，と．そういう筋立てで話したつもりなのですが．

坂東：そういうパターンを見て，何かそこに，どういう構造がはたらいているのかということを知りたいと．ちょっとよくわからないのですけれども，そのなかで，フラクチュエーションするモードと，invariantなモードと言われたんですかね．見分けていくんですが？ そういうのと，それから本当に物理的なコンスタントというのは，どうやって見分けるということな

んですか？

蔵本：ご質問の意味をよく理解していないのですけれども，ここでinvarianceというのは，表面的に見て，この現象面からのinvarianceという意味ではなくて，この現象を支配しているルール，そこにinvariantな構造があるということですね．

坂東：それは睨んでいたらわかるんですか？

蔵本：いやいや，それは縮約をちゃんとやらないとわからないです．表面的に見ていたのではわからない．必ずしも縮約でなくても良いけれど，とにかく共通する数学的構造が発見されると，全然違ったものと思っていたものが，いままで無関係だと思っていたものが，突然結びつくわけです．表面的にわからないからこそ突然結びつくように見えるんだけれど，根底には共通の数学的構造があるわけです．それが深いところにあるから外からはわからない．そこが面白いところだと思います．フラクタルなんかそうでしょう．

早川：あの問題に関しては，振動するというのがポイントです．

坂東：Phaseというのを抜き出したというようなことを言われたんだけど，見たときに，何をどうしたらいいかというのは，どこから始めたのか，あんまりよくわからなかっただけなのです．何か，睨んでいたらいいわけでもない．じゃあその数式の，例えば．

蔵本：睨んでいたんですよ，最初は．このFというのは[Slide 3]，具体的な反応のモデルを知っていましたからその具体形はわかっている．しかし，それをパターンと見比べて睨んでいても何も湧いてこないじゃないですか．この式からきっと説明できるはずなんだけれど．方程式の解として，特解として，きっとこのようなパターンがあるはずなんですよ．でもこんな非線形方程式から特解を見つけるなんてできませんよ．

そうすると，何とかこの方程式をいじらなきゃならない．どういうふうにいじるかというと，そこに一般的な考え方がある．それが縮約という考えである，と．構造安定性という考えが背後にあるんですが，不安定点の近くで良いから，そこだけに限定してみれば何かわかる．そこから延長した同じ構造不安定領域（相）の中ではだいたい同じことが起こっているだろう，ということが物理的に予想できるじゃないですか．臨界点の近くなら式を縮約する手立てがある．それを実際にやってみたということです．実を言えば，これによってこのパターンがただちに説明できたわけではないんですが．

坂東：結局あれですか，最終的に一つのパターン形成をするというような場合には，確かにそういう，最後にはパターンができていくわけだから，それを予想していて，どう縮約できるかということがわかるんですか？

蔵本：いや，そうじゃなくて，知っていてというんじゃなくて．この複素Ginzburg-Landau方程式ですが，これはこんな同心円パターンだけではなくて，いろんな解がありうる．今は解を問題にしているんではなくて発展方程式の縮約ですからね．それはどんな解があるかあらかじめはわからないでしょう．カオス解があるかもしれないし．そこを全部まるごとの可能性を含んでいるところが発展方程式の縮約の強いところなんです．解に対する摂動ではない強さなのです．わかってもらえますか？

早川：ほかに納得いかない方．よろしいでしょうか．それでは，どうもありがとうございました．