氏　　　名	阿部拓郎（あべたくろう）
学位(専攻分野)	博　士（理　学）
学位記番号	理　博　第2957号
学位授与の日付	平成18年3月23日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
研究科・専攻	理学研究科数学・数理解析専攻
学位論文題目	The stability of the family of A_2-type arrangements （A_2型超平面配置の族の安定性）
論文調査委員	(主　査) 教授 森脇　淳　　教授 河野　明　　助教授 加藤文元

論文内容の要旨

超平面配置とは，ベクトル空間中の超平面の有限族として定義される極めて単純な幾何学的対象である。しかしながら，関連する研究分野は，代数，位相幾何，微分幾何，及び，組み合わせ論等の多岐にわたる。その代数学的な見地からの研究は，一般の滑らかな多様体上の因子から定義される対数的ベクトル場（一般に反射層となる）に関する斎藤恭司の論文に端を発する。寺尾宏明らは，斎藤の理論における因子を超平面配置と考えることで超平面配置の研究に対数的ベクトル場の概念を導入し，超平面配置の組み合わせ論的情報とそれに関する研究で成果をあげてきた。特に寺尾により導入された超平面配置の自由性の概念は，組み合わせ論的情報との関係がはっきり記述できる点などからその重要性が広く認識される様になった。特に，超平面配置の自由性がその組み合わせ論的情報から決定されるか否かを問うた寺尾予想は，この分野における最重要予想の一つとなっている。他方，近年，ドルガチェフ，カプラノフ，シェンクらにより，対数的ベクトル場の安定性を調べるという研究方針が提示され始めている。ここで安定性とは，第一チャーン類を階数で割ることで定義される傾きが部分束のそれと比較して小さいということである。安定性はベクトル束のモジュライ空間の構成などにおいて重要な役割を果たしており，安定性と超平面配置の対数的ベクトル場との関係を調べることはこの分野の研究に新しい方向性をもたらすものと期待されている。阿部氏は代数幾何，特に射影空間上のベクトル束の理論に熟達しており，また代数的見地からの超平面配置研究に関する専門家でもある。以上のような背景を踏まえて，阿部氏の論文の内容を少々専門的になるが以下で簡略に述べたい。

標数0の閉体とその上の3次元ベクトル空間を固定する。このベクトル空間中に，A_2型の超平面配置の族$\{A(k)\}$が，いわゆる古典的なコクセター型のA_2型超平面配置の自然な拡張として定義される。この超平面配置の族が定める対数的ベクトル場の族を$\{E(k)\}$とおく。この場合，各$E(k)$は階数2のベクトル束となる。阿部氏の主論文の主定理は，この$\{E(k)\}$のkが十分大きな場合の安定性及び自由性を，$\{A(k)\}$から簡単に定まるある量Nを用いて完全に分類するものである。具体的にはNが0,1,2の場合には自由であり，それ以外の場合は全て安定なベクトル束となる。A_2型の超平面配置が正規交差ではないことを考えると，ドルガチェフとカプラノフによる正規交差の超平面配置の安定性の分類に続く結果といえる。阿部氏の証明方法は，組み合わせ論的計算に吉永正彦の自由性判定法を組み合わせて行われる自由性の証明，及び，シェンクの判定法を巧妙に用いた安定性の証明の二つの部分に分かれる。またどちらの証明においても鍵を握るのは先に述べた量Nの振る舞いを制御するところにある。阿部氏はこの定理の応用として，A_2型の超平面配置の族の自由性及び安定性，さらに，組み合わせ論的情報との関連を明確にしている。またA_2型の超平面配置の族に関連したシフト問題と呼ばれる予想に部分的な解決を与えている。

論文審査の結果の要旨

阿部氏の主結果は，A_2型のルート系が定める古典的なコクセター型の超平面配置の自然な拡張であるA_2型の超平面配

置の族の構造を調べ，それが定める対数的ベクトル場（階数２のベクトル束となる）の族の自由性と安定性を，族の初期配置の情報から容易に得られる量Ｎを用いて完全に分類したものである。もう少し具体的に述べると，次のようになる。Ｎ＝0,1,2の時はベクトル束は分裂しており，分裂のタイプは超平面配置の元の個数が2n＋1である奇数の時は（n,n）となり，2nである偶数の時は（n－1，n）となる。またそれ以外のＮに関しては，ベクトル束は全て安定となる。

阿部氏の証明は，自由性の証明と安定性の証明の二段階にわかれている。その二段階の証明の基礎となっている補題として，対数的ベクトル場のチャーン多項式の正確な記述がある。阿部氏は，チャーン多項式の計算を超平面配置の組み合わせ論的情報である特性多項式を算出し，それにシェンクの結果を組み合わせることで導出している。特性多項式の計算に際してはその煩雑な計算を，A_2型の超平面配置の族に外部直線の概念を導入し，その振る舞いを制御することで巧みに処理している。

自由性に関しては，阿部氏は上述のチャーン多項式の計算結果に，若神子篤史による二次元重複度付の超平面配置の自由性に関する結果と，吉永正彦による自由性判定条件を組み合わせることで証明を行っている。この方法は極めて簡潔な証明を与えるという利点があるが，他方参考論文で阿部氏が行ったB_2型の超平面配置の族の自由性の判定には用いることが出来ないという欠点がある。B_2型に関する分類では，阿部氏は，自由性に関する加除定理と呼ばれる手法を丹念に用いることで証明を与えている。この二種類の異なった方法で，困難な計算を遂行した手腕は評価に値する。

他方安定性の証明に関しては，シェンクの安定性判定法が重要な役割を果たしている。この判定法は，ある超平面配置の安定性を，それから一つの超平面を抜いた超平面配置の安定性とある種の数値的条件から導くものである。阿部氏はまず上述したチャーン多項式の振る舞いとベイリンソンの結果から，上述した量Ｎが－1あるいは3の時には余接束に直線束をテンソルしたベクトル束が得られることを示した。さらに，この余接束を出発点として，シェンクの判定法の数値的条件を満たす直線の加除を巧みに行い，Ｎの増減を制御することで安定性を証明している。このような，超平面配置の族から決まる量を制御することで安定性を示すという方針は，参考論文におけるB_2型に関する結果にも用いられている汎用性の高い方法である。

これらの応用として阿部氏は，自由性と安定性を組み合わせ論的情報と関連付け，またシフト問題と呼ばれる組み合わせ論と代数幾何を結びつける未解決問題に対して，初めて部分的な解答を与えた。

以上の理由により，本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認めた。また論文内容とそれに関連した試問の結果，合格と認めた。