

氏名	甲斐千舟
学位(専攻分野)	博士(理学)
学位記番号	理博第2959号
学位授与の日付	平成18年3月23日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
研究科・専攻	理学研究科数学・数理解析専攻
学位論文題目	Symmetry characterization of quasisymmetric Siegel domains by convexity of Cayley transform images (ケイリー変換像の凸性による準対称ジーゲル領域の対称性条件)
論文調査委員	(主査) 助教授 梅田 亨 教授 河野 明 教授 吉田 敬之

### 論文内容の要旨

複素平面における上半平面の高次元への一般化として、1957年にピャテツキー・シャピロによって導入されたジーゲル領域は、有界領域に正則同値であり、次元が7以上であれば互いに同値ではない非対称領域が連続濃度存在し、結果として、カルタンが1935年に提出した問題の解答を与えることになった。こういった歴史的経緯からしても、ジーゲル領域の中で対称な領域になっているものを特徴付けるという問題は大変興味深いテーマである。本論文ではケイリー変換を用いて、それによるジーゲル領域の像の凸性で対称領域を特徴付けるということ、準対称な領域で行っている。準対称なジーゲル領域自身はユークリッド型のジョルダン代数と、その複素化の表現を用いて定義されるジーゲル領域で、非対称ジーゲル領域の中で最も対称領域に近いものと考えられ、佐武一郎氏によって1970年代後半に導入されたものである。既約なものは完全に分類されている。準対称ジーゲル領域のケイリー変換も、1980年に対称領域でのケイリー変換になぞらえた形、すなわちジョルダン代数とその表現を用いた形で、ドルフマイスターによって導入され、その像は有界領域になることがわかっている。本論文では、このドルフマイスターによる準対称ジーゲル領域のケイリー変換について、その像が凸集合になっていることと、領域が対称であることが同値なことが証明された。対称領域のときは、ドルフマイスターのケイリー変換はコラニーとウルフによるケイリー変換の逆変換になっていて、彼らの結果により、対称ジーゲル領域は非コンパクトなエルミート対称空間のハリッシュ・チャンドラ実現に写される。ハリッシュ・チャンドラ実現はあるノルムに関する単位球に一致するということから、ケイリー変換像が凸集合であることが容易にわかる。よって本論文のオリジナリティは、その逆方向の主張が成り立つことを示したことにある。つまり、対称領域から離れると、ジーゲル領域のケイリー変換像はもはや決して凸集合にはならないという、極めて明快な事実を証明したことにある。

本論文は、学位申請者甲斐千舟氏が、修士課程在学中より行ってきた一連の研究の成果の一つである。同氏の研究は、等質錐及びジーゲル領域上の調和解析学をテーマとしており、最初の研究成果は修士課程の指導教員であった野村隆昭氏(現九州大学)との共著論文として、日本数学会の欧文機関誌から2005年1月に出版された、「A characterization of symmetric cones through pseudoinverse map (擬逆元写像を通しての対称錐の特徴付け)」である。次いで、本論文の主題であるケイリー変換像の凸性による対称領域の特徴付けに話題が移り、まず初めに等質管状領域で結果を出し、野村隆昭氏との共著論文として、2005年の *Differential Geometry and its Applications* 第23巻に「A characterization of symmetric tube domains by convexity of Cayley transform images (ケイリー変換像の凸性による対称管状領域の特徴付け)」を発表した。学位申請の本論文は甲斐氏の学術論文としては3編目であり、単著である。なお、本論文の結果はさらに一般の等質ジーゲル領域にまで拡張できることが甲斐氏自身によって示されており、それをまとめた論文は、本審査を実施した日現在で、学術雑誌に投稿中である。

## 論文審査の結果の要旨

複素平面において、上半平面はケイリー変換によって単位円の内部に写される。この事実は上半平面の高次元への一般化である対称ジークル領域にまで拡張されていて、対称ジークル領域はケイリー変換によって、あるノルムに関する開単位球に写される。はたして一般の等質ジークル領域のケイリー変換でもこのような事情になっているかどうかは、しばらく手つかずの問題であった。対称ジークル領域を少し一般化した準対称ジークル領域のケイリー変換が定義されたのは、1980年に出版されたドルフマイスターの論文においてであるが、その論文では、像が有界集合であることが示されているだけで、その形状に関しては何も触れられないままであった。本論文では未解決のまま放置されていたこの問題に手がつけられ、ケイリー変換像の凸性により、準対称領域の中で対称ジークル領域を特徴付けようというものである。オリジナルの部分であるところの、ケイリー変換像が凸集合であることから領域の対称性を導く証明は、直接的ではあるが研究対象についての深い洞察力が必要なものであり、最終的にはドルフマイスターが彼の教授資格論文（1978年）の中で証明した既約準対称ジークル領域の対称性条件に持ち込むものである。本論文の結果によって、非対称な準対称ジークル領域では、そのケイリー変換像は決して凸集合にならないことがわかった。従っていかなるノルムを導入しても、それに関する球の内部というような記述が不可能なことが示されたことになる。本論文はすでに学術論文として、ドイツの出版社から刊行されている *Journal of Lie Theory* に受理され、第16巻、47-56として出版が決定している。このことは本論文の結果がすでに学術的に十分に意味のあることを示している。

論文内容の試問においては、本論文に続く研究計画についても尋ねた。まず本論文の結果が、一般の等質ジークル領域にまで拡張できることが甲斐氏自身によって示されていることを確認した。そこで用いられるケイリー変換は野村氏が2003年の論文において導入したもので、パラメータを持った族になっている。投稿中の論文の結果は、等質ジークル領域の対称性と、このケイリー変換による像の凸性およびパラメータの特殊性（コラニー・ウルフのケイリー変換に一致するようなパラメータ）との同値性である。さらに今後の研究計画として、等質ジークル領域がその有界モデルとして「本質的に凸集合」になっているものを持つことと領域の対称性とが同値ではないかという予測が述べられた。根拠としては、1992年の Mok-Tsai の論文で示された、階数が1より大きい非コンパクトエルミート対称空間の有界な凸集合モデルは、本質的にハリッシュ・チャンドラ実現に限るという定理であることが述べられた。

以上に記したことにより、本論文は博士（理学）の学位論文として十分に価値あるものと認める。また、論文内容とそれに関連する事項についての試問、そして研究計画の将来性からみても、論文審査の結果として、合格と判定する。