【123】

氏　　名	河合悠介（かわい ゆうすけ）
学位(専攻分野)	博　士（理　学）
学位記番号	理　博　第 2960 号
学位授与の日付	平成 18 年 3 月 23 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当
研究科・専攻	理学研究科数学・数理解析専攻
学位論文題目	Borcherds products for higher level modular forms （レベルの高いモジュラー形式に対する Borcherds 積）
論文調査委員	（主査）助教授 池田　保　　教授 吉田敬之　　教授 齋藤　裕

論文内容の要旨

Borcherds 積とはカスプに極を許すような一変数の保型形式のフーリエ係数を指数にして得られる無限積で定義される保型形式である。Borcherds は一般化された Kac-Moody 代数の分母公式にこのような無限積がしばしば現れることからこのような無限積の一般的構成に導かれた。Borcherds の最初の構成はカスプで極を許すような全モジュラー群に関する保型形式でフーリエ係数がすべて整数であるようなものから偶ユニモジュラー格子で符号の負部分が 2 であるようなもの（たとえば E8 型の格子と双曲平面 2 つの直和などがこのような条件を満たす）に関する直交群で対応するⅣ型対称領域上の無限積として多変数の保型形式をえるものであった。その後 Borcherds は非退化な偶格子の Weil 表現を用いてさらに一般的な無限積を構成した。これにより格子の Weil 表現に関するベクトル値保型形式でカスプでは極をもっていてもよいが，そのフーリエ係数の負の項は整数であるようなものから，Ⅳ型対称領域上の保型形式が無限積として得られることがわかる。

この無限積としてえられる保型形式は極を持ちえるが，その因子は Heegner divisor といわれる特別な因子しか現れない。さらにその係数は最初の保型形式の負の項のフーリエ係数を用いて具体的に表すことができる。Bruinier は Borcherds の構成を正則でないようなベクトル値 Poincare 級数に対して適用し，その結果としてコホモロジー的な解釈を与えて Borcherds 積の特徴づけとして，格子が直和因子として双曲平面を 2 つ含むとき因子が Heegner divisor の和で表されるような対応するⅣ型対称領域上の有理型保型形式は Borcherds 積であることを示した。

Borcherds の最初の証明は circle method によるフーリエ係数の評価を用いて無限積の対数を与える関数を超幾何関数を用いて解析接続するというものであったがその証明には専門家でも真偽を判定できない部分があった。一方第二の証明は物理学者 Harvey と Moore のアイデアによる特異テータ積分を用いるものであり，数学的には完全な証明ではあるが，より証明が複雑になった感は否めない。カスプで極をもつような保型形式に対してテータ関数との畳み込み積を考えようとするとその積分は通常発散してしまうので，これを正則化して発散積分に意味をもたせる必要がある。そのためには基本領域上の積分をカスプの近傍で切り落として発散を押さえ，さらに Hecke のトリックをいわれる複素変数を付け加えた上で極限値を取る必要がある。こうして発散するテータ積分に意味を持たせたものが特異テータ積分である。ともあれこのアイデアにより自然な形で Weil 表現が理論に現れ，ベクトル値の保型形式から Borcherds 積を構成することが可能になったのであるが，こうして得られる Borcherds 積は格子の直交群全体に関する保型性を持つようなものしか得られていなかった。より一般的な Borcherds 積を得るためには格子の直交群の数論的部分群に関する保型性を持つような Borcherds 積を得る理論が必要となる。

河合氏が本論文で取り組んだのはこの問題である。河合氏は一変数のベクトル値の保型形式で適当な高次のレベルをもつ数論的部分群に関して偶指標でねじった保型性をもつものを考え，このようなものから Borcherds 積を得る理論を構成した。こうして得られる Borcherds 積は格子の直交群の数論的部分群に関する保型性を持ち，その無限積の指数は最初の保型形式のフーリエ係数を偶指標でねじったものである。

論文審査の結果の要旨

河合氏の証明は基本的にはBorcherdsの第二の証明と同様のアイデアを使うものであるが，河合氏の場合には核関数として用いるテータ関数を偶指標を用いてねじったようなものを考える必要がある。このようなねじれたテータ関数の変換性をWeil表現を用いて性格に記述することによって，最初に用いる一変数の保型形式がどのような変換性を持たなければならないかという条件が正確に記述できることになった。特異テータ積分の処理はBorcherdsの方法と同様にカスプの近傍で基本領域を切り落として発散を押さえ，さらにHeckeトリックを用いることによって発散する（ねじれた）テータ積分に意味を持たせることができる。ただし，河合氏の場合には全モジュラー群ではなくその合同部分群を扱っているのでその部分の処理がより複雑になっている。こうしてえられる特異テータ積分はHeegner divisorの上に対数型の特異点を持っているので，この関数の指数関数をとることによって，無限積として表されるようなIV型対称領域上の保型形式が得られる。この際に一価の関数が矛盾なく定義されるためにフーリエ係数の整数性の条件が必要になる。またHeegner divisor上での極の位数もフーリエ係数の負の項を偶指標でねじった和で表されることがわかる。

河合氏の理論の具体的な例として堀江太郎氏の研究した，ねじれたDedekindエータ積が自然に得られることも注目に値する。堀江氏のDedekindエータ積においてはワイル・ベクトルに対応する指数はL関数の特殊値が現れるが，この特殊値は河合氏のねじれた特異テータ積分から自然な方法で説明される。

このように河合氏の論文は学問的に興味深いものである。よって，本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。

また，論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果，学位論文として合格と認めた。