氏　　名	高橋博樹（たかはしひろき）
学位(専攻分野)	博　士（理　学）
学位記番号	理　博　第 2961 号
学位授与の日付	平成 18 年 3 月 23 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当
研究科・専攻	理学研究科数学・数理解析専攻
学位論文題目	On the basin problem for Hénon-like attractors （エノン的アトラクターに対する吸引領域の問題）
論文調査委員	（主査）助教授 國府寛司　教授 河野　明　教授 重川一郎

論文内容の要旨

力学系理論は写像 $f: M \to M$ の反復合成で生成されるような軌道 x, $f(x)$, $f^2(x)$, … の振舞いの定性的性質を調べることを目標にする。構造安定な力学系，即ちその定性的性質が摂動に対して保たれるようなものの重要性は数理モデルの観点からも明らかであり，その性質もこれまでによく調べられている。しかしそのようなものは十分に多くはないことも同時にわかってきており，従って構造不安定な力学系が起こす大域的な分岐現象を理解することが現在では重要になっている。

不変集合がその近傍の大部分の点を引きつけるときそれをアトラクターと呼び，引きつけられる点の集合を吸引領域と呼ぶ。吸引領域の問題とは，アトラクターの吸引領域内の軌道の漸近分布を問うものである。主論文は，Hénon 的写像族と呼ばれるパラメーター (a, b) を持つ次のような形の $\mathbb{R}^2$ 上の微分同相写像の C^3 級の族 $(F_{a,b})$ が持つカオス的アトラクターに対する吸引領域の問題について研究したものである：

$$F_{a,b}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1-ax^2+bu(x, y, a, b) \\ bv(x, y, a, b) \end{pmatrix}。$$

このような写像族 $(F_{a,b})$ は，構造不安定性の要因となる homoclinic 接触や臨界的な saddle-node cycle を持つ写像の 1 パラメーター開折として現れる。写像族 $(F_{a,b})$ において，一様双曲的でないカオス的アトラクターが摂動に対し測度論的な意味で安定に存在することを証明した Benedicks-Carleson の結果は力学系理論における最重要な定理の一つであり，その後の Mora-Viana, Benedicks-Young, Benedicks-Viana, Wang-Young らによる発展によって，このカオス的アトラクターの性質がよりよく理解されるようになってきた。

カオス的アトラクターは局所的には不安定多様体が幾重にも積み重なったような層状の構造を持っており，これらの層の間の厚みを精密に評価することが吸引領域の問題を考える上で本質的である。以下に述べる主定理や系と同等のことは，写像族のヤコビアンに関する“均質性”という仮定の下で最初に Benedicks-Viana が，後に Wang-Young が異なるやり方で証明した。彼らはヤコビアンの均質性を本質的に用いて，この層の厚みに関するある意味で一様な評価を得ている。しかしこの均質性は常に満たされるものではない。例えば homoclinic 接触から得られる Hénon 的写像族は均質的だが，臨界的な saddle-node cycle の任意の通有的開折には均質的でない Hénon 的写像族が含まれている（参考論文[1]）。また特異点を持つ非可逆写像族は明らかに均質的でない。主論文の新奇性は，ヤコビアンの均質性が成り立たない状況でも層の間の厚みに関する（一様とは限らない）ある弱い評価が成り立つことを示し，これを用いて均質的とは限らない Hénon 的写像族が持つカオス的アトラクターに対する吸引領域の問題を肯定的に解決したことにある。この結果は非可逆写像に対する吸引領域の問題に道を開くと期待される。主定理を述べる。

定理 1　$a \in \Delta_b$ となる任意の (a, b) に対し，$F_{a,b}$ のカオス的アトラクター $A_{a,b}$ の吸引領域内の殆んど全ての点の軌道の漸近分布は SRB 測度 $\mu_{a,b}$ に一致する。即ち，任意の連続関数 $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ と吸引領域内の殆んど全ての点 z に対し，次が成り立つ：$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(F_{a,b}{}^i(z)) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi d\mu_{a,b}$

論文審査の結果の要旨

申請者の研究は，力学系理論，特にカオスと呼ばれる力学系の複雑で予測困難な振る舞いの統計的性質に関するものである。カオスは1970年代までに自然科学や工学の複数の分野で認識され，80年代以降に数学や物理学において研究が大きく進展したが，現在でも数学的に重要な問題が未解決のまま残されている。申請者が取り組んだカオス的アトラクターの吸引領域の問題は，どのくらい多くの初期値から出発する力学系の軌道が統計的に同様のカオス的振る舞いをするか，ということに関する問題である。カオス的アトラクターを数学的に理解するためには，まずその存在（のための条件）を明らかにし，次にそのアトラクターの上でのカオス的な振る舞いを統計的に特徴づける不変測度の存在を示し，さらにその不変測度に関する吸引領域の問題を解決するというのが基本的な理解の進み方であって，その意味で申請者の研究成果は意義がある。また，対象となったHénon的写像は，カオス的力学系の研究で最も重要な例であるHénon写像を含み，またホモクリニック接触と呼ばれる構造不安定な力学系からの分岐において普遍的に現れる写像族である。ホモクリニック接触は力学系の構造不安定性の研究において本質的な役割を担うべき研究対象であり，それを研究するためにはHénon的写像におけるカオス的アトラクターのより良い理解が不可欠である。

申請者は，Hénon的アトラクターのエルゴード的性質に関して前頁のような興味深い結果を得た。前述のように，主定理の結果はBenedicks-Viana, Wang-Youngによる均質的なHénon的アトラクターついての同様の結果を拡張したものであり，この部分だけを取りあげれば申請者の貢献は技術的な部分の改良に留まるように見える。しかし，この改良は本質的であり，従来の均質性の仮定の下では扱えないようなHénon的写像族が意味のあるものとして存在する。実際，申請者は参考論文1において，臨界的なsaddle-node cycleから均質的でないHénon的アトラクターが分岐することを証明しており，従って主定理の結果は2次元力学系の大域的分岐理論の観点から十分に意味のあることである。主定理の証明の議論で最も本質的な部分は，2次元写像の反復合成による2次元図形の変形の具合を解析することである。しかし，こういった議論はこれまでにBenedicks-Viana, Wang-Youngらの結果を除いてはほとんど皆無であり，また，彼らの議論もJacobianの均質性の仮定が本質的に用いられていた。申請者の得た主定理は，この均質性を仮定しない。均質性が成り立たない状況は，前述の臨界的なsaddle-node cycleの他にもsaddle-node horseshoeや非可逆写像のホモクリニック分岐など少なからず存在し，従って主定理はこの方面の研究を大きく進展させる著しい結果であり，この方面の今後の研究の重要な指針となるであろう。このように本論文は単に結果だけではなく，十分な将来への発展の可能性を含んだものであると言えよう。

参考論文はいずれも力学系の分野における興味深い研究結果であり，申請者の広い学識と力量をうかがわせるものである。

以上により，本申請論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認めた。また，主論文の内容を中心に，参考論文やそれらに関連した事項について試問した結果，合格と認めた。