氏　　　名	劉(リュウ)　慶(ケイ)　平(ヘイ)
学位(専攻分野)	博　士（理　学）
学位記番号	理　博　第 2962 号
学位授与の日付	平成 18 年 3 月 23 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当
研究科・専攻	理学研究科数学・数理解析専攻
学位論文題目	On the construction problem for uni-instantaneous bilateral birth-death processes （単一瞬間状態を持つ両側出生死亡過程の構成について）
論文調査委員	(主　査) 教授 重川一郎　　教授 井川　満　　助教授 吉田伸生

論文内容の要旨

可算集合 E を状態空間とし，連続時間パラメーターを持つマルコフ過程を一般にマルコフ連鎖と呼んでいる。申請者の主論文ではこのマルコフ連鎖のうち，一つの状態が瞬間状態である出生死亡過程の構成を示したものである。特に $+\infty$ と $-\infty$ の境界の種類に応じて存在，非存在の判定条件を与え，一意性，レゾルベントの構成，保存的なマルコフ過程の存在と一意性の条件を完全に決定したものである。

以下主論文の内容をより詳しく見ていく。状態空間は $E=\{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$ をとる。E 上の時間的に一様なマルコフ連鎖は推移確率 $P(t)=(P_{ij}(t);\ i, j\in E)$ によって一意的に決定される。$P_{ij}(t)$ は状態 i から t 時間後に状態 j に移る確率を表す。$t=0$ での微分 $Q=P'(0)$ をマルコフ連鎖の生成作用素と呼ぶ。$Q=(q_{ij})$ とするとき（Q1）$0\leqq q_{ij}\leqq\infty$，$i\neq j$，（Q2）$q_i=-q_{ii}\geqq 0$，（Q3）$\sum_{j\neq i} q_{ij}\leqq -q_{ii}$ の三つの性質が成り立つ。これら三つの性質が成り立つとき，前生成作用素と呼ぶ。前生成作用素は常にマルコフ連鎖の生成作用素となっているわけではないし，また異なるマルコフ連鎖が同じ生成作用素を持つこともある。これから，前生成作用素を与えたときに，マルコフ連鎖の存在及び一意性の問題が発生する。$q_i<\infty$ のとき状態 i は安定状態，$q_i=\infty$ のときは瞬間状態と呼ばれる。瞬間状態は粒子がほとんどすぐに他の状態に遷移するという特異な挙動をするため取り扱いが難しい。ここでは 0 のみが瞬間状態で，その他は安定状態の場合が考察されている。また 0 以外では典型的な出生死亡過程であることを仮定している。即ち $i\neq 0$ のとき $q_i<\infty$，$a_i=q_{ii-1}$，$b_i=q_{ii+1}$ で，それ以外の成分はすべて 0 である。状態 0 を除けばすべての状態が安定状態であるので，従来からよく研究されており，マルコフ連鎖の存在，一意性の問題は完全に解決されている。特に Feller 最小マルコフ連鎖は基本的で，この論文の中でも重要な働きをし，そのレゾルベントを $(\phi(\lambda), \lambda>0)$ で表す。レゾルベントとは推移確率（半群）のラプラス変換として定義されるものである。ラプラス変換の一意性からレゾルベントは推移確率を一意的に定めるので，マルコフ連鎖の構成にはレゾルベントを構成してもよい。実際この論文ではレゾルベントを構成し，それによってマルコフ連鎖の存在を示すという手法を用いている。状態 0 は瞬間状態と仮定したので $(q_{0j})=(\alpha_1, -\infty, \alpha_2)$ の形である。$\alpha=(\alpha_1, \alpha_2)$ とおく。

さて，マルコフ連鎖の存在を示すに当たって，境界の性質が本質的に効いてくる。境界は $+\infty$ と $-\infty$ の 2 つであるが，それぞれ Feller による分類，正則，脱出，流入，自然の四つが存在する。粒子が境界に達するか，あるいは境界から入ってくるか，という性質を反映した分類である。また存在に関しては次の二つの性質が重要な働きをする：

（A.1）$\alpha\phi(\lambda)$ は総和可能な行ベクトルである

（A.2）$\alpha\mathbf{1}=\infty$

さて，以上の枠組みの下で，得られた結果は次の通りである。

(1)　境界がともに正則のとき：存在のための必要十分条件は（A.1）が成立すること

(2)　境界が一方が正則で他方が脱出のとき：

存在のための必要十分条件は（A.1）が成立すること

(3) 境界が一方が正則で他方が流入または自然のとき：
存在のための必要十分条件は（A. 1）が成立すること
(4) 境界がともに脱出のとき：
存在のための必要十分条件は（A. 1）かつ（A. 2）が成立すること
(5) 境界が一方が脱出で他方が流入または自然のとき：
存在のための必要十分条件は（A. 1）かつ（A. 2）が成立すること
(4) 境界がともに流入または自然のとき：
対応するマルコフ連鎖は存在しない

以上で，すべての場合が尽くされ，必要十分条件の形で条件が与えられている。証明は，状態を一点だけ加えたとき，元のマルコフ連鎖を拡張できるための必要十分条件が A. Y. Chen によって得られているので，それに沿ってなされている。

論文審査の結果の要旨

本論文は可算状態空間を持つ連続時間パラメーターのマルコフ連鎖の存在について論じたものである。特にここで取り扱われているのは一点のみが瞬間状態で，他は安定状態という両側出生死亡過程である。状態空間が可算のマルコフ連鎖はその構造が比較的簡単で，推移確率が ∞ 次元ではあるが，行列表示を持つため，確率論的な意味がとらえ易く，従来から盛んに研究されてきた。マルコフ連鎖は推移確率 $P(t)=(P_{ij}(t); i,j\in E)$ で記述され，その微分 $Q=P'(0)$ はマルコフ連鎖の生成作用素と呼ばれ，マルコフ連鎖を特徴付ける重要な量である。対角成分は $-\infty$ をとりうるが，これが有限な状態は安定状態と呼ばれ，比較的取り扱いが容易である。実際 Feller によってすべての状態が安定状態である場合は，前生成作用素に対して，必ずマルコフ連鎖が存在すること，さらにその中で最小のものが存在することが示されている。それ以後一意性の問題や，保存的なマルコフ過程の存在，一意性の問題を含め，ほぼ完全に解明されたといってよい。

一方，対角成分が $-\infty$ の状態は瞬間状態と呼ばれ，粒子はほとんどすぐに他の状態に遷移するためその取り扱いが格段に難しくなる。D. Williams がすべての状態が瞬間状態であるようなマルコフ連鎖を構成するなど部分的な結果はあるが，まだ十分解明されたとは言いがたい状態である。本論文では一つの状態のみが瞬間状態である，両側出生死亡過程を考察している。生成作用素は局所的な運動を規定しているが，境界条件などの情報は含まれていない。瞬間状態は特異な状態であるために，安定状態とは共存しにくいもので，瞬間状態がいくつかあるほうが Williams の例にあるように，むしろ構成しやすい。ここでの観点は境界を特異な点として，瞬間状態をとりこむという方向性である。生成作用素は爆発後の運動は規定していないのでその自由度に応じて確率過程を構成していることになる。実際爆発しないときは，瞬間状態を持ったマルコフ連鎖は存在しないこともこの論文で示されているわけである。これらはマルコフ連鎖の研究として興味ある観点であり，新たな着眼点を与えたものである。このアイデアはすでに片側出生死亡過程ですでに L. Q. Tang によって述べられているが，本論文はそれを両側出生死亡過程に拡張したもので，境界条件の組み合わせでさらにより複雑多様な場合でも取り扱うことが出来ることを示しており，マルコフ連鎖の理論に広がりをもたらしたものとして高く評価できる。

マルコフ連鎖の構成に関しては，A. Y. Chen の拡張の手法を用い，解析的にレゾルベントを構成するという方法がとられている。ある種の方程式の解の存在などを利用するわけであるが，確率論的な対応が十分解明されているとは言いがたい。これらはこれからの課題であり，そうした問題を提供したという意味でも興味深い論文であるといえる。

よって本論分は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また，論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果，合格と認めた。