氏　　　名　高田智広（たかたともひろ）
学位（専攻分野）　博士（理学）
学位記番号　理博第2955号
学位授与の日付　平成18年1月23日
学位授与の要件　学位規則第4条第1項該当
研究科・専攻　理学研究科数学・数理解析専攻
学位論文題目　Certain multiple orthogonal polynomials and a discretization of the Bessel equation
（ある多重直交多項式とベッセル方程式の差分化）

論文調査委員　（主査）教授 上野健爾　教授 井川満　教授 河野明

## 論文内容の要旨

本論文はある種の多重直交多項式の漸近公式をBessel函数の満たす微分方程式の差分化を使って得たものである。

実数RのBorel測度$\mu_1$, $\mu_2$およびRの区間$\Delta_1$, $\Delta_2$が与えられたときに，任意の正整数の組$(n_1, n_2)\in Z_+^2$に対して

$$Q_{(n_1,n_2)}(z)\int_{\Delta_j}\frac{d\mu_j(x)}{z-x}-P_{(n_1,n_2)}(z)=O(z^{-n_j-1}),\ j=1,\ 2$$

および$\deg Q_{(n_1,n_2)}\leq n_1+n_2$を満足する多項式$Q_{(n_1,n_2)}$, $P_{(n_1,n_2)}$が存在することが知られている。このとき，多項式$Q_{(n_1,n_2)}$は次の直交関係式

$$\int_{\Delta_j}x^\nu Q_{(n_1,n_2)}(x)\,d\mu_j(x)=0,\ \nu=0,\ 1,\ \cdots,\ n_j-1$$

を満たす。このことから$Q_{(n_1,n_2)}$を多重直交多項式とよぶ。特に正整数$n$に対して

$$p_n=\begin{cases}Q_{(k,k)} & n=2k\\ Q_{(k+1,k)} & n=2k+1\end{cases}$$

とおくと次の形の4項関係式

$$u_kp_{2k+1}(z)+a_kp_{2k}(z)+v_kp_{2k-1}(z)+w_kp_{2k-2}(z)=zp_{2k}(z)$$
$$u_k'p_{2k}(z)+a_k'p_{2k-}1(z)+v_k'p_{2k-2}(z)+w_k'p_{2k-3}(z)=zp_{2k-1}(z)$$

を持つ。そこで，これらの関係式の係数に関して次の条件を満たす$u_\infty$, $u_\infty'$, $V$, $V'$, $W$, $W'$, $v$, $v'$, $w$, $w'$が存在すると仮定する。

$$u_\infty=\lim_{k\to\infty}u_k\neq 0,\qquad u'_\infty=\lim_{k\to\infty}u_k'\neq 0,$$

$$\frac{v_k}{u_k}=V+\frac{v}{k}+o\left(\frac{1}{k}\right),\qquad \frac{w_k}{u_k}=W+\frac{w}{k}+o\left(\frac{1}{k}\right),$$

$$\frac{v_k'}{u_k'}=V'+\frac{v'}{k}+o\left(\frac{1}{k}\right),\qquad \frac{w_k'}{u_k'}=W+\frac{w'}{k}+o\left(\frac{1}{k}\right),$$

さらに次の条件を仮定する。

条件1 $WW'\neq 1$

条件2 $Z>0$, $h_0$を固定し$0<h<h_0$, $N=[Z/h]$と整数$n=0$, $\cdots 2N-1$に対して

$$\left|p_n\left(1-\frac{h^2}{2}\right)\right|\leq M$$

$$\left|p_{n+1}\left(1-\frac{h^2}{2}\right)-p_n\left(1-\frac{h^2}{2}\right)\right|\leq M'(n+1)h^2\leq Mh$$

を満たす$M$, $M'$が存在する。

主定理　以上の条件のもとで，次の漸近公式が成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty} p_n\left(1-\frac{2z^2}{n^2}\right)=\Gamma(\alpha+1)\left(\frac{\sqrt{\lambda}\,z}{2}\right)^{-\alpha} J_\alpha(\sqrt{\lambda}\,z)$$

ここで，$\alpha$ は

$$2\alpha+1=\frac{(1-W)(v+w+w')+(1-W')(v'+w+w')}{1-WW'}$$

で定まり，$J_\alpha$ は Bessel 函数，$\lambda$ は適当な定数である。

この主定理によって，広いクラスの多重直交多項式に対して漸近公式が証明されたことになる。また，これまで得られている多重直交多項式の漸近公式を統一的に得ることもできる。たとえば，申請者の参考論文で得られて $d\mu_1(x)=d\mu_2(x)=|1-x|^\alpha(1+x)^\beta(a-x)^\gamma dx$，$\Delta_1=(-1,\ +1)$，$\Delta_2=(+1,\ a)$ $(\alpha,\ \beta,\ \gamma>-1,\ a>1)$ に対して定義される多重直交多項式の漸近公式はこの定理に含まれている。

また，この主定理の証明には Bessel 関数の満たす微分方程式の差分化が有効に使われており，多重直交多項式の漸近公式に Bessel 函数が現れる理由も併せて説明している。

## 論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

直交多項式は古典解析学の中心的研究主題の一つであり，19世紀以来多くの研究が行われて来た。特に20世紀に入ってから，直交多項式の漸近挙動を調べることが研究の中心的なテーマの一つとなった。とくに，Legendre 多項式の漸近挙動を示す Mehler - Heine 型公式は古典解析学の美しい結果の一つである。しかしながら，漸近挙動の研究は個々の直交多項式の特質に依存する場合が多く，一般的な理論は必ずしも満足すべき状況ではなかった。こうした中で，1992年，Aptekarev は直交多項式 $\{q_n\}$ が満たす 3 項関係式

$$b_n q_{n+1}(x)+a_n q_n(x)+b_{n-1}q_{n-1}(x)=xq_n(x)$$

の係数が $n\to\infty$ の場合 $b_n\to 1/2$，$a_n\to 0$ を満足し，かつ $q_{n+1}(1)/q_n(1)$ が $1+(\alpha+1/2)/n+o(1/n)$，$\alpha>-1$ を満足すれば，$n^{-(\alpha+1/2)}q_n(1-z^2/(2n^2))$ は複素平面の任意のコンパクト集合上で漸近的に $J_\alpha(z)/z^\alpha+o(1)$ であることを示した。ここで $J_\alpha$ は Bessel 函数である。この Aptekarev の結果は広いクラスの直交多項式の漸近挙動を統一的に証明した点で画期的なものであった。

ところで，直交多項式は古典解析学だけでなく応用上の重要な函数であるが，20世紀後半には応用上の必要もあり，直交多項式を一般化した多重直交多項式の研究が盛んになり，直交多項式との類似から種々の研究が行われてきた。しかしながら，多重直交多項式の構造は複雑であり，漸近挙動に関しては直交多項式の場合の簡単な一般化がほとんどであった。申請者は参考論文において，特別な Borel 測度から定義される多重直交多項式に対して漸近公式を証明した。しかしながらこの場合の証明は測度の性質に依存しており，一般論からほど遠い結果であった。

申請者は申請論文において，測度の性質を直接使わずに，多重直交多項式の 4 項関係式の係数の漸近挙動をもとに漸近公式を得ることに成功した。申請論文では Aptekarev の議論を参考にしてはいるが，多重直交多項式の特性から来る困難から，Aptekarev の議論にはない新たなアイディアを証明に必要とした。この証明に使われた手法は多重直交多項式の漸近公式に関する今後の研究の新しい研究方向を示し，今後さらなら進展が期待できる。また，申請論文の漸近公式は多くのクラスの多重直交多項式に適用することができ，多重直交多項式の研究できわめて重要な成果である。

このように，申請者の多重直交多項式の漸近公式に関する業績はこの分野の研究の従来の知見を大幅に深め，かつ新しい研究方向を示す顕著な業績であり，大学院在学 5 年未満ではあるが，特例として博士（理学）の学位を授与するに十分と考えられる。

よって，本申請論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。

主論文および参考論文に報告されている研究業績を中心として，これに関連した研究分野について口頭試問した結果，合格と認めた。