氏　　　　名　藤　田　雅　人（ふじ た まさ と）
学位(専攻分野)　博　士（理　学）
学 位 記 番 号　理　博　第 2854 号
学位授与の日付　平 成 17 年 3 月 23 日
学位授与の要件　学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研究科・専攻　理 学 研 究 科 数 学 ・ 数 理 解 析 専 攻
学位論文題目　On the connected components of a global semianalytic subset of an analytic surface
（解析的曲面のグローバルセミアナリティックな部分集合の連結成分について）
論文調査委員　（主 査）教 授 丸 山 正 樹　教 授 森 脇　淳　教 授 河 野　明

論　文　内　容　の　要　旨

実解析的な空間は複素解析的空間と様相を全く異にする。例えば，R^2 において方程式 $x^2+y^2=0$ で定義される空間は点 (0, 0) のみからなり，空間としては 0 次元であるが，環論的には 1 次元である。この例が示すように，空間的な次元と環論的な次元は一般に一致しない。Grauert と Remmert の有名な定理は複素解析空間の固有射による像は複素解析空間であると主張しているが，実解析空間の固有射による像は実解析空間であるとは限らない。実際，実解析空間の固有射による像を含み，固有射について閉じている最も自然な族は subanalytic といわれるものである。

実解析空間と subanalytic の中間の概念として semianalytic といわれる概念がある。連結かつパラコンパクトな実解析多様体 M の部分集合 X が性質

$$(SA)\begin{cases} X\text{の各点 }x\text{ について }x\text{ の }M\text{ における開近傍 }U\text{ と }U\text{ 上の有限個の実解析関数 }f_i,\ g_{il}\text{ が存在して} \\ X\cap U=\bigcup_{i=1}^{m}\{y\in U\,|\,f_i(y)=0,\ g_{i1}(y)>0,\ \cdots,\ g_{in}(y)>0\} \\ \text{と書ける}\end{cases}$$

を持つときに，semianalytic subset と言う。(SA) における U を M でとることができるとき，semianalytic subset は global semianalytic subset とよぶ。M の構造層 O_M の連接イデアル層 I_A で定義される M の実解析部分空間 A をとる。$O_A=O_M/I_A$ の切断を O_M のそれと見なせば，上記の M を A で置き換えて A の semianalytic subset と global semianalytic subset が定義できる。

多くの研究者が global semianalytic subset について研究をしているが，解決できていない問題の中には極めて基本的なものと思われるものも少なくない。申請者はこれらのうち次の問題を取り扱って，部分的ではあるがこれまでの結果を遙かに超える成果を挙げた。

$$(C)\begin{cases} A\text{ は連結かつパラコンパクトな実解析多様体 }M\text{ の連接な実解析部分空間とする。}A\text{ における global semianalytic} \\ \text{subset }X\text{ の連結成分の任意の和集合 }W\text{ は再び }A\text{ の global semianalytic subset になるか。}\end{cases}$$

この問題は Andradas や Castilla 等によって考えられ始めた。彼等は A の次元が 1 のときと，$A=M$ で M の次元が 2 という仮定の下で肯定的であることを示した。前半に関わって，申請者は次の定理を得た。

定理 1．A が 2 次元で，その正規化がアファインであるならば，問題 (C) は肯定的である。

$A=M$ の場合の結果を拡張するために，申請者は「接触部」という概念を導入した。上記の記号の下で W の普通の位相での閉包と $X\backslash W$ の普通の位相での閉包の共通部分のザリスキ位相での閉包を接触部と呼ぶ。

定理 2．M は 2 次元で，$A=M$ とする。接触部が 1 次元であり，かつ有限個の既約成分しか持たないとすると，問題 (C) は肯定的である。

2 編の参考論文は共に塩田昌弘氏との共著論文であるが，これらの中で申請者は注目すべき成果を挙げている。$\mathbb{R}^0$，$\mathbb{R}^1$，

$\mathbb{R}^2$, … の部分集合の族であって，(1)集合におけるブール代数で閉じており，(2)この族のメンバーの線型射影による像もこの族に含まれており，(3) $\mathbb{R}^1$ に含まれるこの族のメンバーは有限個の点と有限個の連結開区間の和集合のみである，を充たすものを o-minimal structure と呼び，この族のメンバーを定義可能な集合という。o-minimal structure の典型的な例が semialgebraic set（semianalytic の条件の実解析を代数に置き換えた概念）の成す族である。

グラフが定義可能な集合となる関数を定義可能な関数と呼ぶ。3次元実解析部分多様体で定義可能な集合になっている M 上で，定義可能かつ実解析関数のなす環 $C^{\omega}_{\mathrm{df}}(M)$ についての Artin-Lang Property が問題である。ここで，Artin-Lang Property とは以下の主張である：

任意の可換環 R に対して $\mathrm{Spec}_{\mathrm{real}}(R)$ を以下の条件を充たす R の部分集合 α の集合として定義する。

(1) $-1 \notin \alpha$, $\alpha+\alpha \subset \alpha$, $\alpha \cdot \alpha \subset \alpha$

(2) 任意の $f \in R$ について $f^2 \in \alpha$

(3) $\alpha \cap (-\alpha)$ は素イデアルである。

この定義の下に，$C^{\omega}_{\mathrm{df}}(M)$ の商体を K とする。$f_1, \cdots f_m \in C^{\omega}_{\mathrm{df}}(M)$ と $\alpha \in \mathrm{Spec}_{\mathrm{real}}(K)$ が $f_1 \in \alpha$, …, $f_m \in \alpha$ を充たすならば，$x \in M$ が存在して，$f_1(x)>0$, …, $f_m(x)>0$ となる。

参考論文では $C^{\omega}_{\mathrm{df}}(M)$ のネター性や任意のコンパクトな解析的集合が定義可能になるという仮定の下で $C^{\omega}_{\mathrm{df}}(M)$ の Artin-Lang Property を証明している。Artin-Lang Property は主論文の定理の証明にも重要な役割を演じているのみならず，実解析関数の環における Hilbert's Nullstellensatz, Hilbert の第17問題などを導き出す基礎になっている。

別の参考論文では，ある種の Rolle 型のパフ多様体が有限個の位相型しか持たないことを，上記の o-minimal structure に関わる事実から証明している。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

論文内容の要旨で説明した通り，実解析的な対象については複素解析的なものに比べて，全体を見通すような統一的理論が組み立てにくい。有効な概念構成についてさえも不充分な状態が長年続いてきた。この事実は主論文，参考論文における引用文献のうち，実解析幾何学や実解析空間に関わるものが殆ど1990年代以降のものであることからもうかがえる。このような困難な状況で申請者は実解析幾何学の基礎付けに寄与すべく精力的な研究を続けてきたが，その中で塩田昌弘氏との共同研究で培った実解析幾何学についての知見，研究手法に加えて，自身が開発した新たな道具をバネにして，主論文の結果の証明に成功した。

定理の証明の方針は，問題 (C) を接触部の次元がより低い場合の (C) に帰着させるというものである。接触部が空であれば，ホイットニーの近似定理により W と $X \backslash W$ を分離する実解析関数を構成して (C) が肯定的に解決する。接触部の次元が0の場合には，まず各点ごとに W と $X \backslash W$ を semianalytic set で分離し，カルタンの定理，オジャジェビッツの不等式などを用いて，接触部が空の場合に帰着させる。

接触部と A の特異点の集合との共通部分の次元が $\dim A-1$ より小さいときには，コーエンの結果により接触部の次元が $\dim A-2$ の場合に還元できるので証明が終わる。しかし，一般の2次元の A では，特異点についてのこの仮定は成り立たない。アファインの正規曲面 Z について，Z 上の実解析関数のなす可換環 $C^{\omega}(Z)$ に関する Artin-Lang Property が成立する。アファインの正規曲面については特異点に関する上記の仮定が成り立つので，A の正規化 A' について得られる結果を Artin-Lang Property を使って A の言葉に置き換え，接触部が0次元の場合に帰着できる。これで「論文内容の要旨」における定理1の証明が終わる。

定理2の証明のための鍵は次の補題である。

補題　f は2変数巾級数として，その最低次の項の次数を n とする。$f_0=f$ とおき，$i=1, 2, \cdots, n$ に対して，f_i の最低次の項の次数が $n-i$ になるように，f_i を

$\dfrac{\partial f_{i-1}}{\partial x_1}$ または $\dfrac{\partial f_{i-1}}{\partial x_2}$

から選ぶ。このとき，semianalytic set の芽

$$\left\{ x \middle| \begin{array}{l} \mathrm{sign}(f_0(x))=i_0,\ \mathrm{sign}(f_1(x))=i_1,\ \cdots,\ \mathrm{sign}(f_n(x))=i_n \\ \mathrm{sign}(x_1)=j_1,\ \mathrm{sign}(x_2)=j_2 \end{array} \right\}$$

は芽として連結である。ここで，i_0，i_1，…，i_n，j_1，j_2 は -1，0，1から任意に選んでよい。

この補題を用いて，適当な global semianalytic subset を構成し，定理2の場合の主張が，接触部の次元が0の場合の問題(C)に帰着される。従って，定理1と同様に定理2の証明が完成する。

参考論文の内容について「論文内容の要旨」において説明した結果は申請者自身のアイデアで証明された部分である。最初の結果については，同じ論文の前半で共同執筆者である塩田昌弘氏が，コンパクトな解析的集合を全て含む最小の o-minimal structure では $C^{\omega}_{\mathrm{df}}(M)$ がネター環になることを示しているので，申請者の結果と合わせれば，この o-minimal structure について Artin-Lang Property が成立することになる。従って，この環における Hilbert's Nullstellensatz, Hilbert の第17問題などが導き出される。

実解析幾何学は，その基礎付けさえも不充分である。複素解析空間あるいは代数的閉体上の代数幾何学と違って，実解析幾何学では対象となる空間とその上の適切な関数の成す環の構造の関係が複雑である。幾何学的問題を環論的に取り扱ったり，その逆に関数の環を幾何学的に考察するという，リーマン以来の複素幾何学，代数幾何学の基本的哲学が初めから崩壊している。従って，この分野では概念構成や定理の定式化が容易でない。申請者は元々代数幾何学の研究者として出発したこともあり，この困難な分野で克服すべきものが何であり，他分野にはない固有の問題は何であるかを十分理解している。主論文において証明されている定理は，関わる全ての問題を解決するものではないが，有力な研究者の成果を大きく超えるものである。定理の定式化そのものが既に申請者の実解析幾何学者としての実力を示しているが，その証明とそのために自身で基礎付けた手法は，深い洞察力と独創性を遺憾なく発揮したものと言える。

以上のように，本学位論文は京都大学博士（理学）を授与するに充分な新しい知見を呈示しており，また申請者の高い独創性を示しているものである。