氏　　　　名　高橋篤史（たかはしあつし）

学位(専攻分野)　博士(理学)

学位記番号　論理博第1454号

学位授与の日付　平成16年9月24日

学位授与の要件　学位規則第4条第2項該当

学位論文題目　tt^* Geometry of Rank Two
（階数2の tt^* 幾何）

論文調査委員　（主査）教授 齋藤恭司　教授 柏原正樹　教授 向井 茂

論文内容の要旨

幾何構造の一つとして平坦構造またはフロベニウス多様体構造と呼ばれるものが近年数理物理学のミラー対称性との関連で注目されている。その一つの起原は原始形式の周期写像理論において齋藤恭司が変形空間の上に導入した構造（1983）であり，今日のミラー対称性との関連では複素幾何モデル側に属するものと理解されている。もう一つの起原は B. Dobrovin により可積分系の理論との関連で公理的に導入されたもの（1993）である。他方シンプレクティク幾何モデル側のグロモフ-ウイッテン不変量等の研究においても類似の構造が観察される。コンセヴィッチは二つのモデルの間にコホモロジカルなレベルでの対称原理が成り立つであろうと予想し（1994），その帰結として両モデルは同一の平坦構造（又はフロベニウス多様体構造）を持つこととなる。これは幾何学に於ける一つの大きな予想として，現在多くの研究が進展中である。

他方，抽象的な幾何構造としてみたとき平坦構造は正則（homorohic）構造のみを用いて定まっており Hermite 計量等の実構造が欠ていることが早くから指摘されていた（Delinge 1985）. 更にミラー対称性との関連で Hodge 構造や原始形式の理論を含む一般理論が期待され，特に高エネルギー物理学に於ける Cecotti-Vafa による研究（1994）はその様な理論の在り方を示唆するものである事を申請者髙橋は指摘した（2002)。C. Hertling はこの様な実構造を平坦構造（フロベニウス多様体構造）に付加した新たな構造として CDV 構造を導入した（2003)。それは変形空間の各点における接空間のうえに anti-holomorphic な involution 指定しかつそれが tt*-方程式呼ばれるものを満たすものである。従って元来，変形空間の各点における接空間のうえには平坦な双線形形式が定まっていたので(平坦構造の定義）合わせて Hermite 計量が定まる事となる。

申請者 髙橋篤史の学位論文はこの Hertling による研究を更に発展させるものである。すなはち上記に導入された Hermite 計量は一般に正定値とはかぎらない。他方，平坦構造（フロベニウス多様体構造）を分類する重要な指標として次元なる概念（最小 exponent）がある。幾何に由来する知られている重要な場合は次元は有理数（実数）となっているが，一般論ではそれは複素数になってしまう。髙橋による研究はこれ等の Hermite 計量のある正定値性と次元の実数性とが同値な概念であることを，階数（変形空間の次元）が2の場合に示した。

さらに正確に主結果を述べると次のようになる。

定義：与えられた CDV-構造が正であるとはその変形空間上のオイラーベクトル場 E にたいし定まる実ベクトル場に沿って充分遠くへ行ったところでは Hermite 計量は正定値となる事とする。

定理：階数2の平坦構造（フロベニウス多様体構造）にたいし正のCDV-構造が入ることとその次元が実数になる事とは同値である。

その証明は Manin による階数2の分類結果を用いるものであるがその中で平坦構造（フロベニウス多様体構造）の持つ対称性 I，S が CDV-構造の対称性に自然に拡張されることを用いる。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

平坦構造（フロベニウス多様体構造）に実構造を与えるという課題は原始形式に対する周期写像への要請として長く，研究者の間で問題となってきた。申請者高橋篤史は数学と数理物理学の両面を深く理解しこの問題が物理学における Cecotti-Vafa による t-t*-fusion 方程式と関連する事をいち早く見抜いてきた。Hertling による仕事はこの様な中で実構造に一つの答を与えるものであった。しかし新しく出来た枠組みのなかでいろいろ未解明の課題が多い。一つは定まった Hermite 計量の符号は点毎に異なり正定値とは限らない。その variation を追跡することは非常に複雑な非線型解析が必要となり現状の一般論では難しい。他方別の問題として抽象的な平坦構造（フロベニウス多様体構造）の次元は一般的に複素数になっているが幾何学に由来する知られている例ではみな有理数である（それはモノドロミーの固有値が一の巾根であることに対応する)。では次元が実数（有理数）である平坦構造（フロベニウス多様体構造）は何が特別なのであろうか。

申請者 高橋篤史の主論文これ等未解明問題を理解する手がかりを与えるものと言える。すなはち，階数 2 の場合には Hermite 計量の符号が充分遠方では正定値となる事と次元が実数になることが同値であることが示されている。その為に，階数 2 とはいえ，分類された個別の可積分方程式について超越解を巧妙に用いて上記の事実を検証している。これ等の結果はまだ階数 2 と言う限られた場合であり高階の場合どうなるか予断を許さないとは言え，これ等未解明の課題に第一歩を踏み出した貴重なものと言える。また階数 2 の場合が特別な役割を果たすであろうと期待する充分な根拠もある。同主論文では構造の対称性を使う等手法的にも幾つか新しい視点が導入されている。この様な平坦構造（フロベニウス多様体構造）の一般的研究は今だ始まったばかりの分野であるが，申請者の仕事はその分野に先鞭を付け，更にそれに実質的内容を与えるものになっていると言える。他方，高橋の結果は幾何学を離れて非線型微分方程式から見ても興味深い主張になっている。

関連論文として提出された一連の仕事は BPS-state counting に関する R. Gopakumar 及び C. Vafa による非常に強い予想を裏付けるものとして非常に興味あるものであり，それらは共著論文ではあるが申請者の並ならぬ研究者としての力量をうらづけるものである。

よって本論文は，博士（理学）の学位論文として充分価値あるものと認める。

なお，主論文に報告されている研究業績を中心とし，これに関連した研究分野について諮問した結果，合格と認めた。