氏　　　名	向　平　敦　史（むかい　ひら　あつ　し）
学位の種類	博　士（情報学）
学位記番号	情　博　第 114 号
学位授与の日付	平成 16 年 3 月 23 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当
研究科・専攻	情報学研究科数理工学専攻
学位論文題目	Studies on Discrete Integrable Systems Associated with Orthogonal Polynomials and Their Applications to Numerical Algorithms （直交多項式に関連する離散可積分系とその計算アルゴリズムへの応用に関する研究）
論文調査委員	（主　査）教　授　中村佳正　　教　授　岩井敏洋　　教　授　野木達夫

論　文　内　容　の　要　旨

本論文は，戸田格子を代表とする空間変数が離散化された可積分系について，直交多項式との関連や解の構造，時間変数の離散化について論じたものである。さらにその結果を用いて，可積分系の計算アルゴリズムへの応用についても考察している。

KdV 方程式等の可積分系は線形固有値方程式とその変形方程式の両立条件，すなわち，Lax形式として表わすことができる。空間変数が離散化された方程式では固有値方程式は離散的になるが，これを直交多項式のみたす漸化式と見なすことにより，直交多項式や連分数の離散可積分系の時間変数による 1 パラメーター変形が導入される。さらに可積分系の時間離散化によって，直交多項式や連分数を通じて Pad' {e} 近似アルゴリズムや固有値計算アルゴリズムの定式化が可能となる。

第 1 章は序章であり，本研究の背景と目的，本論文の構成を述べている。

第 2 章では有限体上の離散戸田格子の解の振舞いと保存量について論じている。いくつかの具体例によって，有限体上の離散戸田格子の解の振舞いを周期的な場合と有限時間でブローアップする場合とに分類している。これらの解の振舞いの相違が離散戸田格子の保存量によって説明されている。さらに，有限体上の離散戸田格子による BCH-Goppa 符号を復号するための新しいアルゴリズムを提示している。BCH-Goppa 符号の復号可能性と有限体上の離散戸田格子の解の振舞いとの関連性についても論じている。

第 3 章，第 4 章では，Ablowitz と Ladik が導入した空間離散の可積分系である複素半離散変形 KdV 方程式とその応用について論じている。Szeg" {o} 多項式は三角モーメント問題を通じて導入される直交多項式のあるクラスである。申請者は Schur フロー，すなわち，複素半離散変形 KdV 方程式の固有値方程式が Szeg" {o} 多項式のみたす漸化式に一致することに着目し，Szeg" {o} 多項式の変形方程式として複素半離散変形 KdV 方程式を定式化している。さらに，複素半離散変形 KdV 方程式を双線形化し，時間変数を離散化して，離散 Schur フロー，すなわち，複素離散変形 KdV 方程式を構成している。また，複素離散変形 KdV 方程式のアルゴリズムへの応用について考察している。まず，Carath' {e} odory 関数の Pad' {e} 近似を計算するアルゴリズムを提示している。さらに，タウ関数解の漸近挙動を解析し，適切な初期条件，境界条件の与え方を見い出して，代数方程式の根を計算する新しいアルゴリズムを与えている。

第 5 章では，RI 格子なる離散可積分系の解の行列式構造について論じている。RI 有理関数は，直交多項式，Laurent 双直交多項式を含む直交関数のクラスであり，RI 格子はその離散的な変形方程式として導入される。申請者は双線形化法を用いて RI 格子の解の行列式構造を明らかにし，相対論戸田格子など他の可積分系との関連を議論している。RI 格子は不等間隔差分の方程式であり，従来の可積分系とは異なる新しい双線形形式が見い出されている。

第 6 章は結論であり，本文で得られた成果について要約している。また，今後の研究の方向性を議論している。

論文審査の結果の要旨

本論文では，直交多項式に関連した可積分系の解の行列式構造，時間変数の離散化およびその計算アルゴリズムへの応用が論じられている。

第2章では，有限体上の戸田格子の解の振る舞いとBCH-Goppa符号の復号アルゴリズムへの応用について論じている。具体例によって有限体上の戸田格子の解の振る舞いを分類し，その相違を保存量を用いて説明している。さらに，BCH-Goppa符号を復号するための新しいアルゴリズムを提示し，その復号可能性と有限体上の離散戸田格子の解の振舞いとの関連について議論している。有限体上の可積分系の研究は情報理論との関わりから今後発展が見込まれる領域であるが，その研究はほとんど進んでいない。本研究は有限体上の可積分系に特有の現象を捉えているのみならず，その復号可能性と有限体上の離散戸田格子の解の振舞いとの関連性についても議論されており，この研究領域の先駆的な研究成果として評価できる。

第3，4章では，Szeg" {o} 多項式に関連した可積分系であるSchurフローとその応用について論じている。Szeg" {o} 多項式はそれ自身重要な直交多項式のクラスであり，またデジタルフィルターの設計に応用できることから，近年しばしば研究されている。従来，離散可積分系と連分数展開，すなわち，Pad' {e} 近似アルゴリズムの関わりの研究としてはChebyshev連分数の計算法である商差法とその離散戸田格子との等価性のみが知られていた。3章で与えた離散Schurフローによる Perron連分数の計算アルゴリズムそのような二番目の例といえる。また，商差法による代数方程式の根の計算に対応するものとして4章の離散変形KdV方程式による代数方程式の根の計算アルゴリズムが与えられている。この背後には直交多項式論があり，本結果は離散可積分系の理論に基づいた古典解析，計算数学の系統的な研究の発展の可能性を示しているという点で意義のある研究であると言える。

第5章では，RI格子方程式なる離散可積分系の解の行列式構造について論じている。RI有理関数は，直交多項式，Szeg" {o} 多項式，Laurent双直交多項式を含む直交関数のクラスであり，RI格子はその離散的な変形方程式として導入されたものであるが可積分系としての構造は未解明であった。RI格子は不等間隔差分の方程式である。本論文では双線形化法を用いてRI格子の行列式解の構造を明らかにし，新しいタイプのタウ関数を発見している。RI格子の双線形形式は従来の可積分系とは異なるが，簡略化による他の可積分系の双線形形式に帰着する。不等間隔差分は離散系に特有の構造であるにもかかわらず，これまでほとんど研究がなされてない。また，ここで得られた結果は，より大きな対称性をもつ可積分系であるRII有理関数系の変形方程式，すなわち，RII格子方程式の研究にも役立つものと期待される。

このように，申請者の学位申請に係る研究は，今後，古典解析，計算数学への応用・発展が期待できる多くの基礎的な結果を含んでいる。

よって，本論文は博士（情報学）の学位論文として価値のあるものと認める。

また，平成16年2月24日に実施した論文内容とそれに関連した試問の結果合格と認めた。