

氏名	井上雅照
学位の種類	博士(理学)
学位記番号	理博第2728号
学位授与の日付	平成16年3月23日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
研究科・専攻	理学研究科数学・数理解析専攻
学位論文題目	The Steenrod algebra and the automorphism group of additive formal group law (スチーンロッド代数と加法形式群の自己同型群)
論文調査委員	(主査) 教授 西田吾郎 教授 河野明 教授 森脇淳

論文内容の要旨

井上雅照氏の学位論文において、 $F_2$ -係数のコホモロジー論における安定作用素達のなす Hopf 代数  $H^*H$  の構造の決定を、従来とは異なる明解な方法で示している。

$R_*$  を  $F_2$  上の有階環とする。 $R_*$  上で定義された乗法的コホモロジー作用素とは、空間  $X$  に対し函手的に定義された環準同型

$$\beta : H^*(X; F_2) \rightarrow H^*(X; F_2) \otimes R_*$$

であって、 $S^1$  上では  $\beta(\ ) = (\ ) \otimes 1$  をみたすものである。このような作用素達は合成によって群  $(Op(R_*))$  と表わす) となる。井上氏はまず、この群が双対 Hopf 代数  $H^*H$  で表現される代数群の  $R_*$ -点であることに着目した。一方、無限次元実射影空間  $RP^\infty$  のコホモロジー環  $H^*(RP^\infty; F_2)$  はべき級数環  $F_2[[x]]$  であり、 $RP^\infty = K(Z/2, 1)$  の積写像により  $H^*(RP^\infty; F_2)$  は加法的形式群である。従って、その環自己同型は加法的形式群の自己同型と考えられる。この自己同型は  $\sum a_i x^{2^i}$  の形のべき級数で与えられる。これを代数群とみたとき、表現する Hopf 代数は容易にわかるように無限変数の多項式環  $A_* = F_2[\xi_1, \xi_2, \dots]$  の形であって、その余積は  $\psi(\xi_n) = \sum \xi_{n-i}^{2^i} \otimes \xi_i$  で与えられる。 $R_*$  上で定義されたコホモロジー環作用素  $\beta$  が与えられたとき、実射影空間  $RP^\infty$  にこれを適用すれば、 $R_*$  上の加法的形式群の自己同型が得られる。これにより Hopf 代数の間の準同型

$$\chi : F_2[\xi_1, \xi_2, \dots] \rightarrow H^*H$$

が得られる。井上氏の主定理は次の通りである。

定理  $\chi$  は Hopf 代数の同型写像である。

この定理の証明には、まず、これらの Hopf 代数の有階ベクトル空間としての次元、つまり Poincare 列を考える。加法的形式群の自己同型の Hopf 代数の Poincare 列は定義から容易に分かる。一方、安定作用素環については古典的な Serre の定理があり、2つの Poincare 列が等しいことが示される。従って同型であることを示すには単射であることを示せば良い。上の Hopf 代数達の普遍性から非自明な乗法的コホモロジー作用素を十分多く構成できればよい。そのため井上氏は Steenrod の約積作用素を一般次の対称群上で考え、多変数多項式における Dickson 不変式の商環上で定義された乗法的コホモロジー作用素を構成した。

井上氏の定理は J. Milnor による安定作用素環の双対 Hopf 代数  $H^*H$  の構造決定の別証を与えているのであるが、用いる事実は、Serre による古典的結果と一般化した Steenrod の約積作用素の乗法性のみであって、Adem 関係式は用いておらず、逆に加法的形式群の自己同型の合成則から Adem 関係式が得られることも示される。

論文審査の結果の要旨

井上雅照氏の研究は  $F_2$ -係数の通常コホモロジー論における安定作用素のなす環  $H^*H$  の構造に関するものである。この

安定作用素環はコホモロジー論のカップ積への作用から自然な Hopf 代数の構造がはいる。この Hopf 代数の構造は古典的に良く知られているが、その決定は次のようになされた。まず、N. Steenrod が約積とよばれる作用素  $Sq^i$  の存在を示し、J. P. Serre はこの作用素と、彼が開発したファイバー空間のスペクトル列を用いることにより、非安定作用素環である Eilenberg-MacLane 空間のコホモロジーを決定した。これにより Serre は、安定作用素環  $H^*H$  が環として  $Sq^i$  達で生成されることを示し、さらに  $H^*H$  の有階ベクトル空間としての次元を決定した。一方、J. Adem により  $Sq^i$  達の間になり立つ関係式が知られていたが、Serre による次元の結果から、Adem 関係式が全基本関係式であること、つまり  $H^*H$  は約積作用素  $Sq^i$  で生成された自由環を Adem 関係式で生成されたイデアルで割った Hopf 代数（これは Steenrod 代数とよばれる）と同型であることが示された。ついで J. Milnor は純代数的な考察から、Steenrod 代数の双対 Hopf 代数が無限変数の多項式環  $F_2[\xi_1, \xi_2, \dots]$ ,  $\deg \xi_i = 2^i - 1$ , であり、その余積は  $\psi(\xi_n) = \sum \xi_{n-i}^{2^i} \otimes \xi_i$  で与えられることを示した。

井上雅照氏は、標数 2 の体上の加法的形式群の自己同型を考え、これを無限次元実射影空間のコホモロジーにおける積を保存する作用素と同一視することにより、安定作用素環  $H^*H$  を加法的形式群の自己同型群を表現する Hopf 代数と直接関係付けた。後者の Hopf 代数の構造は定義から容易に分かるのであるが、このことと Serre の古典的結果からこれらの Hopf 代数は有階ベクトル空間としては同じ Poincare 列を持つことが分かる。井上氏はさらに変数達の線形変形に対し不変な多項式達のなす Dickson 代数上で定義された積を保存する作用素を Steenrod と同様の方法で構成し、それによって上の対応が実際に同型写像であることを示した。

井上氏の結果は Milnor の定理の別証を与えているのであるが、注目すべき点は Milnor が Adem relation という複雑な関係式を技巧的に処理しているのに比べ、加法的形式群の自己同型群という自然な Hopf 代数構造を用いることにより、安定作用素環  $H^*H$  のより本質的な理解を与えている。Milnor が多項式環  $F_2[\xi_1, \xi_2, \dots]$  上に見出した Hopf 代数構造が、加法的形式群の自己同型群あるいは Dickson 代数の商体にも見られるということは大変興味深いものと思われる。また、井上氏の方法は、より一般に Landweber 完全でない一般コホモロジー論とそれに付随する形式群にも適用できる。特に Morava の K-理論についてはその形式群（Honda 形式群）の自己同型群はよく知られており、井上氏の方法が Morava の K-理論の理解に寄与できるものと期待される。

以上により本論文は博士（理学）の学院論文として価値あるものと認められる。さらに学識についても、論文内容とそれに関連した試問の結果合格と認めた。