Title	Microlocal Analysis of Linear Partial Differential Equations via the FBI Transform(Abstract_要旨)
Author(s)	Takuwa, Hideki
Citation	Kyoto University (京都大学)
Issue Date	2004-01-23
URL	http://hdl.handle.net/2433/148283
Right	
Type	Thesis or Dissertation
Textversion	none

氏　　　名	多久和　英　樹（たくわ　ひでき）
学位の種類	博　　士（情報学）
学位記番号	情　博　第　94　号
学位授与の日付	平成16年1月23日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
研究科・専攻	情報学研究科数理工学専攻
学位論文題目	Microlocal Analysis of Linear Partial Differential Equations via the FBI Transform （FBI変換による線型偏微分方程式の超局所解析）
論文調査委員	（主　査）教　授　中村佳正　　教　授　岩井敏洋　　教　授　森本芳則

論　文　内　容　の　要　旨

本研究は，超局所解析理論においてFBI変換と呼ばれる大きなパラメータを含む積分作用素を偏微分方程式における解構造の解析へ応用したもので，具体的には，退化Schr"{o}dinger方程式の解の一意性と分散型方程式に対する解の超局所平滑効果という二つの問題について以下に述べる結果を得ている。

FBI変換はFourier変換を一般化した積分変換であり，複素相関数に付随したFourier積分作用素と考えられる。この理論は1982年頃に一般論としてSj"{o}strandなどによりまとめられた。近年，FBI変換の従来知られているものとは異なった使い方が提案されてきた。本研究は，FBI変換の新しい側面について研究をしたものである。具体的には，FBI変換と作用素の交換子を超局所解析の立場から考察したものである。また，従来斉次方程式を中心に行われてきた問題を，Schr"{o}dinger方程式に代表される非斉次方程式において考察し，これらの方程式特有の現象を考察している。

第1章は序章であり，本研究の背景と目的，本論文の構成を述べている。第2章では本研究で用いるFBI変換の理論について説明している。

第3章の主結果の一つは，偏微分方程式の解の局所一意性に関する問題である。この問題は，制御理論や逆問題などの応用をもち，数学だけにとどまらず工学等に広く応用を持っている。ここでは，Schr"{o}dinger方程式の解の一意性が論じられている。これまでの研究は，主要部が斉次のシンボルの場合を中心になされてきた。また，非斉次の場合は重みを付けた主シンボルを導入し，斉次方程式の場合との類推でなされてきた。一意性を考察する場合，重み付き2乗可積分ノルムに付随したCarleman評価式を示すことで成される。近年Tataru，H"{o}rmander，Robbiano-Zuily等によって係数の解析性を考慮したCarleman評価式と，それを保証する超曲面の強擬凸性の条件が与えられてきた。ここでは，それらの考察では扱えない退化Schr"{o}dinger方程式の一意性について超曲面の擬凸性に基づく方法を提案し，compact uniquenessと呼ばれる結果を得ている。この結果は，時間微分の項を低階項としてFBI変換を通して見ることで可能となったものである。同時に，退化熱方程式に対しても同様の結果が示されており，従来にない枠組での解の一意性定理と言える。

第4章，第5章では，二つめの問題として，高階分散型方程式の解の平滑効果が論じられている。平滑効果とは，エネルギー等の保存量などから通常期待される解の滑らかさより，ある種の分散効果のため，解が滑らかになる現象を指す。この現象については，従来，2階の方程式であるSchr"{o}dinger方程式を中心に研究がなされてきた。特にRobbiano-Zuilyによって，変数係数Schr"{o}dinger方程式における解の平滑効果を研究する際に，FBI変換によって2階の作用素であるLaplacianを1階の作用素に陪特性曲線に沿って大域的に変換する方法が提案されている。ここでは，Robbiano-Zuilyの方法が高階実主要型と呼ばれる一般の作用素に対しても有効であることを明らかにしている。この考察を通して，従来，解析が困難であった解の平滑効果を保証する方程式の階数と初期値の減少度の関係が明確にされた。特に超局所的な結果としてはこの様な一般的な結果は初めてと言える。

第5章では，また，FBI変換の相関数の大域評価を示す際に，作用素のHesse行列に対するレゾルベント評価を詳しく行

う点で，Robbiano-Zuilyの研究にない考察を行っており，FBI変換による作用素の大域的変換論に新しい見方を示している。このような点で，主論文での考察は，高階分散型方程式特有の状況に基づいており，従来のSchr"{o}dinger方程式研究で扱われることのなかった方程式の基本的性質を明らかにしている。

論文審査の結果の要旨

本論文では，複素相関数で定義されるFBI変換を用いて，退化Schr"{o}dinger方程式における解の一意性，高階実主要型作用素で定義される分散型方程式における解の平滑効果が論じられている。前者では2次の多項式からなる複素相関数が，後者では分散型方程式から導かれるアイコナール方程式をみたす，より一般的な複素相関数が考察されている。

解の一意性については，斉次方程式に対するTataru等による係数の解析性を考慮した超曲面の擬凸性とFBI変換で定義される重み関数をもつCarleman評価が知られていた。またこの方法は，時間微分の項も考慮した主要部を考えることでSchr"{o}dinger方程式にも拡張されている。申請者の研究は，これらには当てはまらない退化Schr"{o}dinger方程式を考察したものである。申請者の得た一意性定理は，通常解の一意性が成り立つ場合と崩れる場合の境界的な場合であり，通常解析が困難である。ここでは，FBI変換と時間微分の項の相互作用を考察することで，申請者の定義した退化Schr"{o}dinger方程式にふさわしい超曲面の擬凸性で保証される弱いCarleman評価によっても，時間微分に当たる項を低階項としてとらえられることを証明している。また，申請者の結果は，従来知られていたものと異なり，非斉次方程式特有の状況を反映している。

分散型方程式についての解の平滑効果の証明は，Fourier積分作用素論におけるEgorovの定理と呼ばれる作用素の変換理論とFBI変換とを効果的に用いてなされている。解の平滑効果は，陪特性曲線に沿った大域現象であり，この大域性のゆえに超局所的な取り扱いが難しい。申請者は，Schr"{o}dinger方程式に対してRobbiano-Zuilyが提案した方法を，方程式の変換論及び解の平滑効果の両方の立場からも自然な枠組みである実主要型作用素に対して拡張している。この研究は，超局所的な解の平滑効果を高階一般の方程式に対して行った点で先駆的なものであり，解の解析性を保証するための初期値の遠方での減衰度を作用素の階数を用いて決定している。また，高階方程式において初めて現れる解析の困難さを指摘し，それを新たな解析で解決している。このように，主結果が先駆的なだけでなく，高階方程式特有の状況を明らかにしている点でも高い知見を与える研究と言える。

このように，申請者の学位申請に係る研究は，FBI変換による作用素の変換とその応用に関するもので，特に，Schr"{o}dinger方程式などの分散型方程式に対して工学的，物理学的に重要な問題と深く関係した基礎研究として，高い見識を示した極めて優れた研究と言える。

よって，本論文は博士（情報学）の学位論文として価値あるものと認める。また，平成15年12月26日に実施した論文内容とそれに関連した試問の結果合格と認めた。