

氏名	塚田弘志
学位の種類	博士(経済学)
学位記番号	論経博第296号
学位授与の日付	平成15年7月23日
学位授与の要件	学位規則第4条第2項該当
学位論文題目	デリバティブの基礎理論

論文調査委員 (主査) 教授 吉田和男 教授 木島正明 助教授 岩城秀樹

論文内容の要旨

塚田弘志氏から提出された論文『デリバティブの基礎理論 金融市場への数学的アプローチ』は序章と3部13章からなり、デリバティブに関する既存の理論の成果を統一的な視点から体系的に整理し、理論的構造とその経済学的な意味を明らかにして、最適化問題との関連を求めようとする意欲的なものである。

まず、序章においてデリバティブ理論に関して説明を行い、問題意識の提起を行う。

第I部(第1章から第4章まで)では、離散的取引時間を持つ証券市場のモデルを構成し、より簡単なモデルによる分析を行う。ここでは、証券市場で取引される証券は、配当支払いがあってもよいものとして、一般的なモデルとして構成する。そして、通常行われる無裁定条件を仮定する。また、この証券市場では、資金を用いずに利益をあげるような取引は成り立たないことを仮定する。以上の仮定の下でデリバティブの価格が次のようにして求まることを示す。

すなわち、マルチンゲール測度という特別な確率測度を用い、デリバティブの収益の割引現在価値の期待値を求めると、その期待値がデリバティブの価格となる。これによりデリバティブの価格決定が線形経済学の応用問題であることを示す。このような形でデリバティブの価格が決まることは、一定の条件の下では財の価格が生産費だけから決まり需要の状態には左右されないのと同じロジックであることが分かる。

次に、アメリカ型オプションと呼ばれる特殊なオプションの価格を求める。アメリカ型オプションの価格の決まり方は、その契約の形態のために特別な取扱いが必要となって複雑な問題となることから、まず最適停止問題の解法を解説することから始める。その際、解法の直感的意味が明らかになるような証明をつけている。そして、前記のデリバティブの価格決定方法と最適停止問題の解法を組合せてアメリカ型オプションの価格を求める。

第II部の前半(第5章から第8章)では、第I部の理論を、通常用いられる連続的な取引時間を持つ複雑なモデルにあてはめる。そこで、連続的取引時間を持つ一般化されたブラック・ショールズモデルを構成する。このモデルも第I部で行った議論と同じ原理でデリバティブの価格が求まることを示す。すなわち、マルチンゲール測度と呼ばれる特別な確率測度を用いてデリバティブの収益の割引現在価値の期待値を求めると、その期待値がデリバティブの価格となることが示される。この一般的原理とモデルの特殊な性質を用いるとブラック・ショールズの公式が導かれることを示す。これは、確率積分の理論を用いると、マルチンゲール測度の具体的な形が簡単に分かるためである。

そして、このデリバティブ価格を求める原理と最適停止問題についての一般論から、アメリカ型オプションの価格が求められることを示す。ここで求められたデリバティブ価格はいずれも確率積分を用いて表わされることとなる。この事実と、確率積分と偏微分方程式の関係に関する一般理論から、これらのデリバティブの価格が満たすべき偏微分方程式を導いている。

第II部後半(第9章から10章)では、第II部前半の議論を割引債に適用する。そこで、金利変動を明示的に取り扱うために割引債価格のモデルを構成する。割引債価格のモデルは、本質的には、一般化されたブラック・ショールズモデルである

ことを示す。第Ⅱ部前半の一般的原理を用いて、各種の割引債価格のモデルにおけるデリバティブの価格を求める。この場合、具体的な計算を行うために、確率測度の変換の方法がよく用いられるが、この確率測度の変換の方法について分かり易い証明を与える。第Ⅱ部前半と同様にして、これらのデリバティブの価格が満たすべき偏微分方程式を各モデル毎に導くこととする。さらに、各種の割引債価格のモデルにおけるデリバティブの価格を具体的に計算する。その際、2つの方法を用いている。まず、確率積分による価格の表現から直接、解を求められるものがあることを示している。他方、この方法によって価格を定められない場合には、先の偏微分方程式を解いて価格を求めている。

第Ⅲ部では、不確実性下での消費・投資の最適化問題の解法原理を解説する。そこで、一般化されたブラック・ショールズモデルを用いて不確実性下での消費・投資の最適化問題を構成する。ここでは証券市場での取引には何の制約もないと仮定し、この問題がラグランジュ乗数法で解けることを示す。

この最適化問題を証券市場での取引への制約を導入する。即ち、空売りの規制や、借入れ金額の上限の設定などの制約を導入する。こうした複雑な最適化問題の解法については従来きれいな結果が得られているが、その解法は複雑で意味が必ずしもよく分からない。そこで次のような工夫をする。まず、不確実性下での消費・投資の最適化問題の特徴をすべて備えた有限次元の最適化問題として構成する。そして、これは無限個の不等式制約条件を持った最適化問題となることを示す。従来より得られている有限個の不等式制約条件を持った最適化問題の解法を無限個の不等式制約条件の場合に拡張する。

ここで包絡線定理を適用することにより最適化問題が解けることを、発見的方法で示す。従来の最適化問題の結果は、前記の発見的方法による推論を数学的に厳密化したものであることを示す。すなわち、有限時間で不確実性が存在する最適化問題においては、包絡線定理の応用により簡単に解けることを示す。

論文審査の結果の要旨

本論文は既存のデリバティブ価格の決定理論を一方では数学的な立場、他方では経済学的な意味から統一的に理解しようとするものであるが、そのねらいをかなりの程度達成している。評価される点は以下の四点である。

第一点は経済学的な意味から数学的に整合的な統一的理解を与えていることである。すなわち、デリバティブの価格の決まり方や消費・投資の最適化問題の解を求めるために、確率積分や偏微分方程式を一切必要としない最も簡単なモデルを定式化して、デリバティブの価格の決まり方と消費・投資の最適化問題の解の求め方を明らかにすることで、ロジックの構造とその経済学的意味を明らかにして、これを通常用いられる確率積分を使用する複雑なモデルの上でも、デリバティブの価格が同じロジックにより求まることを示している点である。これによってデリバティブの価格決定の理論に確率積分が不可欠でないことを示している。また、デリバティブの理論に現れる偏微分方程式は、すべて確率積分に関する一般論から統一的な方法で導かれることを示している点である。偏微分方程式は確率積分を用いる複雑なモデルで現れるのであって、これもデリバティブ価格の決定の理論にとって不可欠でないことが示される。

第二点は、離散的取引時間を持つモデルにおけるデリバティブの価格決定のロジックは線型経済学の簡単な応用問題であり、一定の条件の下では財の価格が需要の状態に関係なく生産費用のみから定まると同じロジックによっていることを明らかにしている点である。また、連続的取引時間を持つモデルにおけるデリバティブの価格決定も全く同じロジックによっていることをはっきりさせている。

第三点は、既存の証明を次の諸点で一般化・改良している点である。すなわち、離散的取引時間を持つモデルについての理論を定差方程式を用いて定式化し、確率積分の理論との関連を明らかにして見通しを良くしている。最適停止問題の解法について原理的な整理を行い、直観的に分かり易い証明を行っている。連続的取引時間を持つモデル上でのデリバティブの価格決定が、離散的取引時間を持つモデルと同じように行われることをはっきりさせている。アメリカ型オプションが満たす偏微分方程式を直観的に明らかな方法で導いている。割引債価格のモデルを取扱うのに必要となる確率測度の変換の方法について分かり易い証明を与えている。これまでの証明に対して、直感的に分かりやすい方法で証明を与えており、デリバティブ理論をより明快に理解できるようにした点は評価される。

第四点は、消費投資の最適化問題に関して、無限個の不等式制約条件を持つ最適化問題を解いている点である。無限個の制約条件を持つ最適化問題を設定し、その解を見出すための条件を調べたこと、及び、解を見出す鍵が包絡線定理にあるこ

とを示したことは高く評価される。すなわち、一般に、価格メカニズムの下では経済資源は価格の働きによって最適に配分されるとされる。本論文の第12章では、無限個の不等式制約をもつ最適化問題はある種の価格を用いることにより価格機構の下での資源配分問題と全く同様にして解かれることが示されている。無限個の不等式制約条件を持つ最適化問題が、包絡線定理の助けにより、従来取扱われてきた有限個の不等式制約条件を持つ問題とまったく同様に扱えることを明らかにしたことである。ここで用いられた解法は、制約条件が一般の凸集合である最適化問題へと一般化できる可能性を持つと思われる。

以上から分かるように、本論文は、デリバティブ価格評価に関する既存の理論の成果を統一的な視点から整理し、理論全体の構造とその経済学的な意味付けを明らかにしようとする極めて意欲的なものであるが、いくつかの問題点を指摘せざるを得ない。

まず、第一に、デリバティブ価格付けの論理が線形経済学の簡単な応用問題であることを指摘し、デリバティブ価格が割引現在価値のマルチンゲール測度による期待値となることを示しているのであるが、価格付けメカニズムの説明に留まっており、マルチンゲール測度そのものの経済学的な意味付けが与えられていない点があげられる。このため、何故期待値が価格となるのかということの経済学的解釈が不明瞭となってしまっている。

第二に、第Ⅲ部の連続時間モデルにおける消費・投資の最適化問題において、問題解決原理そのものに対する経済学的解釈が与えられていない点である。本論文では、問題を不確実性のない有限次元の簡単な最適化問題と対比させることによって同じ原理で解けることを説明しているが、解法の解釈として、有限次元の最適化問題における原理と同じであると指摘するのに留まっている。本論文の目的の1つが理論構造の経済学的意味を明確にすることであったことを想起すると、この問題においては、その目的が十分に達成されているとは言い難い。

しかしながら、これらは本論文の他の多くの貢献に比べれば些細なものであり、その価値を損なうものではない。よって、本論文は博士（経済学）の学位論文として価値あるものと認めた。なお、平成15年4月9日、論文内容とそれに関連した試問を行った結果、合格と認めた。