【101】

氏　　　名	あら　い　じん 荒　井　迅
学位(専攻分野)	博　士（理　学）
学 位 記 番 号	理　博　第 2572 号
学位授与の日付	平 成 15 年 3 月 24 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研究科・専攻	理 学 研 究 科 数 学 ・ 数 理 解 析 専 攻
学位論文題目	Tangencies and the Conley index （タンジェンシーとコンレイ指数）
論文調査委員	（主 査） 教 授 河 野 明　　教 授 宍 倉 光 広　　助教授 國 府 寛 司

論　文　内　容　の　要　旨

本論文の目的は，離散力学系の分岐の発生をとらえる代数的な手法を Conley 指数を用いて構成することである。対象とする分岐は不変集合の間を繋ぐ connecting orbit と呼ばれる軌道たちがなす構造の変化，および双曲型周期点の不安定多様体と安定多様体が起こすホモクリニック接触やヘテロクリニック接触である。まず connecting orbit の分岐をとらえる transition matrix pair を離散力学系に対して構成する。次にホモクリニック接触やヘテロクリニック接触の発生を力学系を射影接バンドルに持ちあげることで，ある種の connecting orbit の存在に関連づける。これによりホモクリニック接触やヘテロクリニック接触の発生が transition matrix pair の議論で結論できるようになる，

Conley 指数に関する準備（§2）

本論文ではコホモロジー Conley 指数，Morse 分解および connection matrix pair 等の概念を用いる。コホモロジー Conley 指数とは，孤立不変集合 S に対して次数付きベクトル空間と，その自己同型の組を対応させるものである。また孤立不変集合 S の Morse 分解とは，S に含まれる有限個の孤立不変集合の族 $\{M(p)|p\in P\}$ であって，集合 P に適当に半順序を定義すると，S 内の軌道が全てその半順序に従って $M(p)$ たちを結ぶようにできるものである。このとき各 $M(p)$ を Morse 成分，その間を結ぶ軌道を connecting orbit と呼ぶ。Morse 分解が与えられた時に，各 Morse 成分のコホモロジー Conley 指数から S のコホモロジー Conley 指数や各 Morse 成分間の connecting orbit の存在を示すのが connection matrix pair であり，成分が線型写像である行列対の形をとる。

Transition Martrix Pair の構成（§3，4）

写像の 1-パラメータ族 $\{f_\lambda : X \circlearrowleft\}_{\lambda\in\Lambda}$ を考え，パラメータにより連続的に変化する孤立不変集合 S_λ と，S_λ の Morse 分解 $\{M_\lambda(p)|p\in P\}$ を考える。このとき，2つのパラメータ値での connection matrix の情報から，その両端のパラメータでは存在しない不安定な connecting orbit が2つのパラメータの間のあるパラメータで存在するということを結論したい。この現象がこの論文で言うところの connecting orbit の分岐である。そのための議論は原理的には次のようなステップを踏む。

(1)力学系を2つのパラメータ値で解析し，Morse 成分の Conley 指数および connection matrix pair を求める。

(2)パラメータを変数と思い，パラメータが時間と共にずれていく新たな力学系を考える。

(3)もとの力学系の2つのパラメータ値での Morse 成分を集めると新に構成した力学系の Morse 分解が得られる。

(4)その系はパラメータをずらす速度が十分小さいとき，ある Morse 成分間の connecting orbit を持つことを(1)の情報を用いて connection matrix pair で示す。

(5)ずらし速度を0にする極限をとると，(4)で示された軌道がある不変集合にハウスドルフ距離で収束するが，得られた不変集合が実はもとの力学系での不安定な connecting orbit を含んでいることを示す。

ステップ(2)における新たな力学系とは，直積 $X\times\Lambda$ 上に写像 $F_{\in} : X\times\Lambda \circlearrowleft$ を，$F_{\in}(x,\ \lambda):=(f_\lambda(\mathrm{x}),\ g_{\in}(\lambda)$ と定義す

ることにより得られる。ただし $g_{\in}(\lambda):=\lambda+\lambda\in(1=\lambda)$ はパラメータのずらし効果を表わす写像であり，$\in$ がずらしの速度である。ステップ(4)のポイントは $F_{\in}: X\times\Lambda \circlearrowleft$ の connection matrix pair が2つのパラメータでの connection matrix pair から求まるという点であり，幾何学的観点からは局所的な情報から大域的な情報を引きだす議論をしているといえる。ステップ(5)の議論では，数列 $\varepsilon_n\to 0$ に対し，$M_1(q)$ から $M_0(p)$ への $F_{\in}$ による connecting orbit, c_n を考える。c_n の閉包はハウスドルフ距離による位相で集合 $\bar{c}$ に収束する。$\varepsilon=0$ では F_0 の Morse 分解は存在しないのだが，$\bar{c}\subset X\times\Lambda$ をパラメータ λ で切った集合 $\bar{c}\cap\{\lambda\}$ はひとつの Morse 成分に含まれるか，それらを結ぶ connecting orbit であることがわかる。全ての λ で $\bar{c}\cap\{\lambda\}$ がひとつの Morse 成分に含まれているとすると(4)で示された軌道の存在に矛盾することから求める結論が得られる。

transition matrix pair は，以上の議論から人工的なずらしの導入やハウスドルフ距離の議論を除外して代数的な関係のみを抜き出して定義され，connection matrix pair と同様行列対の形をとる（§4）。上記の議論の一般性が証明されるので，代数的な関係のみ抜き出した transition matrix pair を見れば connecting orbit の分岐の情報が得られる。

また transition matrix pair を計算するために有用な命題がいくつか証明される。重要な点は，力学系そのものについては粗い情報しか得られない場合でも，これらの命題の代数的条件により transition matrix pair の成分が計算できる場合があるということである。

§4の最後に実際に transition matrix pair の成分を計算し，connecting orbit の分岐の発生がとらえられる例を相空間が2次元，3次元の場合にそれぞれ示した。

力学系の射影化とホモクリニック／ヘテロクリニック接触の関係（§5）

この節では相空間 M は n 次元多様体，写像 f は可微分同相写像とする。M の各点 x に，その点での接ベクトル空間 T_xM の射影空間 P_xM を乗せたファイバーバンドル PM を考える。PM 上に，微分写像 $Df: TM\to TM$ から導かれる写像を Pf とする。これは Df において接ベクトルの大きさに関する情報を無視し，方向のみを考えたものである。

x を f の双曲型不動点とし，D_xf の不安定方向，安定方向のなす P_xM の部分集合をそれぞれ E_x^u, E_x^s と書くことにする，このとき E_x^u, E_x^s が Pf に対し孤立不変集合となることが示される。

この節の主要な結果は，p および q を f の双曲型不動点，$\dim W^u(p)+\dim W^s(q)\leq n$ としたとき，あるコンパクト集合 $S\subset PM$ があって S に含まれる E_p^u から E_q^s への connecting orbit が存在するならば，$W^u(p)$ と $W^s(q)$ は横断的ではないという命題である，この命題により，§4で構成した transition matrix pair を用いて PM 上の connecting orbit の分岐をとらえ，M でのホモクリニック／ヘテロクリニック接触の発生を結論するという議論が可能になった。

最後に，ホモクリニック／ヘテロクリニック接触を実際にこの議論によりとらえる例をそれぞれ挙げている。ここで考える2次元の力学系の1-パラメータ族は，射影化して E_x^u や E_x^s の適当な近傍をとると力学系が位相的に§4での3次元の例と共役になることがわかり，よって Conley 指数や connection matrix も同一なので新たな計算をすることなく求める結論が得られる。

論文審査の結果の要旨

Conley 指数という位相幾何学的理論を用いて力学系を代数化することが最大の特徴である，現在の力学系の研究では，解析学的な（もしくは微積分学的な）手法が主流であるが，こういった手法では扱えない問題が多くある。すなわち，系が複雑，相空間の次元が高い，相空間が複雑な空間であるといった場合である。このような場合に Conley 指数の摂動に対する安定性やホモトピー不変性が威力を発揮する。この性質により Conley 指数をより簡単な力学系に変形した上で求めたり，数値実験で求めることも可能である。Conley 指数を計算機により求める技法は既に確立しているので，本研究での理論的発展はすぐに具体的な系の解析に役立てることができる。

このような代数化のメリットとして，ホモロジー代数やカテゴリー代数の結果を力学系の研究に適用することができるという面もある。これらの分野には既に多くの結果の蓄積があり，本研究によりその力学系的な意味を探ることができる。例えば，ホモロジー次元が1以下であるようなアーベル圏の任意の長完全列が，ある複体の短完全列から得られるというホモロジー代数的議論により，アトラクター・リペラー分解の場合の connectionmatrix の一般化が得られる。

またConley指数は位相的不変量なので，一般に微分構造が問題になるようなC^r級の摂動に対しては何の情報ももたらさない，これを本研究では力学系の射影化等の技法により克服して代数的な議論に持ち込んでいるが［主論文］，この点が大きな特徴であり成果である。同様な技法により接球面バンドルに持ち上げて，Conley指数による位相的エントロピーの評価を改善することも可能である。ここでは再帰性を持つ力学系をバンドル束に持ち上げることが一種のブローアップであり，それにより困難を取り除くというアイディアが共通しており，このアイディアが適用できる現象は他にもあると考える。

射影化等の技法によりバンドル束に持ち上げると，当然全空間の次元は高くなり，解析的な困難が増えるように思われるかも知れないが，現在の対象に対しては前記のConley指数を計算機により求める技法で対応できる範囲である。また，球面バンドル上のThorn-Gysin完全列で簡単に底空間でのConley指数から全空間のConley指数が計算できるような場合もある。

さらに本研究の特徴的な点として，近接する分野との関係の深さがある。例えばMorse理論の場合にCohen-Jones-Segalが行なった単体的空間の分類空間を用いて多様体のトポロジーを復元する理論とD. SalamonやC. McCordの単体モデルには密接な関係がある。より直接的には，connection matrixを用いた議論はすべてWitten複体を用いたMorse理論の場合の一般化と思うことができる。また，Floerホモロジー理論はその出自からしてConley指数の無限次元版であるので，双方向に影響を与え合っている。例えばハミルトン系の周期軌道の個数と多様体のベッチ数との関係を与えるArnold予想の証明としてループ空間でのFloerホモロジーに底空間でのConley指数（とconnection matrix）を埋めこむという方法がある。よって，本研究でのconnection matrixやそれに関連した理論の整備に近接する分野の結果を取りこむ，またその逆に影響を与えるということも十分考えられる。特に拡大的な力学系の存在問題に関しては，最近になってループバンドルへの持ち上げとの関連が研究されており，そこにArnold予想の時のConley指数とFloerホモロジーのような関係が存在する可能性がある。

以上のように申請者荒井氏の成果は力学系理論においてこれまでほとんど例のなかった代数的位相幾何学の手法を巧みに利用した重要な物であり，博士（理学）の学位論文として十分な物と考えます。