氏名	西納武男（にしのうたけお）
学位(専攻分野)	博士（理学）
学位記番号	理博第2574号
学位授与の日付	平成15年3月24日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
研究科・専攻	理学研究科数学・数理解析専攻
学位論文題目	Lagrangian submanifold associated with a degenerating family of stable bundles on T^4 （T^{4}の上の安定束の退化族に付随したラグランジアン部分多様体）
論文調査委員	（主査）教授 深谷賢治　教授 河野明　教授 中島啓

論文内容の要旨

ホモロジー的ミラー対称性予想は，シンプレクティック多様体Mのラグランジュ部分多様体Lと，Mのミラーである複素多様体$M^{\vee}$上の正則ベクトル束（より一般に解析的連接層）が対応するというもので（より正確には，導来圏やフレアーホモロジーを用いて定式化される）コンセビッチによって提出されたものである。

ミラー対称性は，キャラビ多様体の，極大退化と関わりがあり，極大退化点では，キャラビ多様体Mはファイバー束の構造$M\to B$をもち，ファイバーはラグランジュトーラスであると思われている。(ただし特異なファイバーも許す。)そして，ミラー$M^{\vee}$は$M\to B$からファイバーごとに双対トーラスをとって得られるとストロミンジャー・ヤウ・ザスロによって予想されている。

この予想とホモロジー的ミラー対称性予想の関係は，いろいろな人によって研究されている重要な問題である。

一方において，4次元多様体がファイバー構造を持つとき，その上の正則ベクトル束を調べる問題は，正則ベクトル束にエルミート・アインシュタイン接続を入れることにより，退化していく多様体上の，ヤンミルズ方程式の問題になる。

退化していく4次元多様体の上の，ヤンミルズ方程式を調べることは，ゲージ理論の数学の中で，重要な問題として研究されてきた。一つの典型的な問題は，アティヤーとフレアーの予想で，これは，3次元多様体とRの直積上のゲージ理論と，ファイバーに当たる曲面（この場合はトーラスとは限らない）の基本群の表現空間上の正則曲線の関係を予想するものである。これを部分的に解決した，ドストグラフ・サラモンらの研究がよく知られている。

西納は，4次元トーラスの極大退化族T_ϵ^4（たとえば$T_\epsilon^4=\mathrm{C}/(\mathrm{Z}^2\oplus\epsilon\sqrt{-1}\,Z^2)$）の上の安定束の族$E_\epsilon\to T_\epsilon^4$を考え，その上のエルミート・アインシュタイン接続の族∇^ϵの爆発を考察することによって，ミラーであるトーラスの族（たとえば$\left(T^4,\ \frac{1}{\epsilon}(dx^1\wedge dy^1+dx^2\wedge dy^2)\right)$）のラグランジュ部分多様体を構成した。

西納の主結果は次の定理である。

定理：T^2上の有限個の点の集合$S\subseteq T^2$が存在して，∇^ϵは（適当な部分列をとれば）$T^4-S\times T^2$上のなめらかな接続∇に収束する。

また，∇の$p\times T^2$への制限は，平坦接続∇^pである。

$T^4\to T^2$のファイバーの双対を集めて束を作ると，シンプレクティックトーラス$(T^4,\ \omega)$が得られる。∇^pたちは，$(T^4,\ \omega)\to T^2$のT^2-Sへの制限の多価の切断sを定める。

この切断sは$(T^4-S\times T^2,\ \omega)$の部分多様体$L$を定めるが，$L$はラグランジュ部分多様体である。

E_ϵの第一チャーン類が0であれば，Lは特殊ラグランジュ部分多様体である。

定理の証明には，次の結果が用いられる。

命題：正の数ϵが存在し次のことが成り立つ。$\mathrm{R}^2\times T^2$上の自己共役接続∇が，$\int|F^{\nabla}|^2<\epsilon$を満たせば，$\nabla$は平坦接続である。

これは R^4 上のウーレンベックによる同様の結果の，対応物である。$R^2 \times \Sigma$，ただし Σ は種数が２以上のリーマン面の場合（でスティーフェル・ホイットニー類がファイバーで０でない束の場合）には，ヤンミルズ方程式に退化が起こらず，対応する命題は証明がより易しいが，この場合は，ドストグラフ・サラモンによって命題は証明されており，彼らのアティアー・フレアー予想の証明で重要な役割を担った。西納が証明した命題は，退化が起こる点でこれよりさらに証明が難しいものである。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

西納武男の学位申請論文は，退化する空間上のゲージ理論を用いて，４次元トーラス上のホモロジー的ミラー対称性予想を，部分的に解決したものである。

ホモロジー的ミラー対称性予想は，シンプレクティック多様体 M のラグランジュ部分多様体 L とその上の平坦 $U(1)$ 束の組（にさらにいくつかのデータを足したもの）を対象とする A 無限大圏の道来圏と，M のミラーである複素多様体 $M^\vee$ 上の解析的連接層の作る圏の導来圏が同型であることを主張するもので，コンセビッチによって提出されたものである。

西納は，４次元トーラスの退化する族 T_ϵ^4（たとえば $T_\epsilon^4 = C/(Z^2 \oplus \epsilon\sqrt{-1}\,Z^2)$）の上の安定束の族 $E_\epsilon \to T_\epsilon^4$ を考え，その上のエルミート・アインシュタイン接続の族 ∇^ϵ の爆発を考察することによって，ミラーであるトーラスの族（たとえば $\left(T^4,\ \frac{1}{\epsilon}(dx^1 \wedge dy^1 + dx^2 \wedge dy^2)\right)$）のラグランジュ部分多様体を構成した。

∇^ϵ はヤン・ミルズ接続になる。この定理は，退化する多様体上のヤンミルズ接続に関する，解析学の困難な問題を解決することによって証明された。

証明のもっとも困難な点は，∇^ϵ の曲率が爆発する点の大きさを，評価することである。これは，T^2 上の平坦接続が可約であり，それに対するヤンミルズ方程式が退化していることにより，いっそう困難になる。

この困難を乗り越えるため，西納は $R^2 \times T^2$ 上のヤンミルズ（自己共役）接続に対する，新しいギャップ定理を証明し，これを用いて，曲率の爆発は有限個のファイバーの上でだけ起こることを証明した。

ホモロジー的ミラー対称性予想には，いくつかの部分的解決が知られている。たとえばトーラスの場合にも一部解かれている。しかし，それらはすべて，ミラーである対象（たとえばラグランジュ部分多様体）が代数的な手法で構成的に求められる場合である。たとえば，４次元トーラスの場合に解かれていたのは，∇^ϵ の曲率がファイバー上で０である場合だけで，この場合は，テンソル計算だけでミラーであるラグランジュ部分多様体を構成することができる。

西納の定理は，これらとは大きく異なり，解が具体的に構成できず，偏微分方程式の関数解析的な研究による超越的手法でラグランジュ部分多様体を構成するものであり，いままでの部分解にくらべて，画期的な進歩を与えるものである。またその証明の内容でも，ゲージ理論との関係を用い，ゲージ理論自身の困難な問題を新たに解決しており，価値の高いものである。

現在証明された定理は，４次元トーラスの場合であるが，方法は一般性があり，K3 曲面や複素３次元のキャラビ多様体の場合にも，将来拡張されることが期待される。

このように，西納武男の学位申請論文は，ホモロジー的ミラー対称性予想という，重要な問題を，４次元トーラスという重要な場合に考察し，大きく前進させたものである。その手法は，非線形方程式の困難な問題に対しても新たな結果をもたらす，独創的で意味深いものである。よって，本申請論文は博士（理学）の学位論文として価値のあるものと認める。

主論文および参考論文に報告されている研究を中心とし，それに関連した研究分野について諮問した結果，合格と認めた。