

氏名	かわむらかつのり 川村勝紀
学位(専攻分野)	博士(理学)
学位記番号	理博第2548号
学位授与の日付	平成14年5月23日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
研究科・専攻	理学研究科数学・数理解析専攻
学位論文題目	INFINITESIMAL TAKESAKI DUALITY OF HAMILTONIAN VECTOR FIELDS ON A SYMPLECTIC MANIFOLD (シンプレクティック多様体上のハミルトニアンベクトル場の無限小竹崎双対性)
論文調査委員	(主査) 助教授 小嶋 泉 教授 齋藤 恭司 教授 高橋陽一郎

### 論文内容の要旨

マイクロ領域での物理現象を特徴づける「量子性」の数学的本質は、物理量を記述する代数の非可換性に帰着される。そうした量子性を取り込む視点を、物理系のもつ幾何学的対称性だけでなく、時空構造それ自体にまで広げることによって、物質と時空の統一的理解を目指す流れが近年「非可換幾何学」として注目されるようになってきている。

そこでの指針となるのは、可換環において見出された、環のスペクトル上の連続関数環と元の環との間に成り立つ Gel'fand 対応の概念である。これによって幾何学的概念を代数的概念として定式化し直し、そこから非可換代数上に一般化する手法がとられる。これと相補的な関係にあるのは、幾何学的空間や関数環はそのまま残し、関数の積構造のみを変形することで非可換性を捉える立場で、形式べき級数を用いた「変形量子化」が最近の主流だが、無限級数なしで Kähler bundle 構造を用いて Gel'fand 対応を一般的な非可換環にまで拡張した Cirelli-Mania-Pizzocchero の「関数環表現」の方法は殆ど知られていない。申請者はこの後者によってもたらされる代数的概念と幾何学的概念の交流・融合に興味を持ち、関連する幾つかのテーマについて研究を行なったが、主論文にまとめられた具体的内容は次のようなものである。

#### 1) シンプレクティック多様体上のハミルトニアンベクトル場の無限小竹崎双対性

(主論文: Infinitesimal Takesaki Duality of Hamiltonian Vector Fields on a Symplectic Manifold)

申請者は上の「関数環表現」において Kähler 構造が果たす役割に注目し、それを symplectic 構造の特殊ケースと見ることによって、作用素環の構造解析で重要な役割を演ずる竹崎双対性定理を symplectic 多様体上の力学系に対して再定式化することを試み、Lie 環を用いた無限小の形での双対性定理を得た。

特に注目されるのは、双対性の議論で本質的な役割を演ずる接合積を Lie 環レベルで定式化した点である。作用素環論においても Lie 群の作用はしばしば重要な役割を演ずるが、奇妙なことに接合積を Lie 環の観点から捉えようとした例は従来殆ど見当たらない。その点でこの論文は Lie 群と Lie 環の自然な対応を、作用素環に基づく非可換力学系とその接合積の文脈で検討することに新しい一つの動機づけを与えるものである。

元々の竹崎双対定理では、群およびその双対による 2 度の接合積を通じて、(既知の I 型 von Neumann 環がテンソル積で付加されるのを別にして) 最初の von Neumann 環が回復されることによって、Fourier および逆 Fourier 変換の拡張概念としての接合積の双対的役割、並びに、そうした双対関係が II 型および III 型の von Neumann 環の間に成り立つことを明らかにした。当論文では、第 2 無限小接合積の結果現れる Heisenberg 代数が非自明な作用を持って、テンソル積の形に分離しない点が元の竹崎定理と異なるが、これは量子化変形の文脈でも問題となる symplectic 構造と正準交換関係との微妙な相違に由来するものと見られる。Lie 環を用いた接合積の扱いにより、通常の変形量子化とは異なる角度で無限級数の収束やエルミート性、状態概念についての困難なしに、非可換環と symplectic 幾何とを結びつける視点は新しいものと言える。

## 2) クントツ環の中へのフェルミオン環の埋め込み

(参考論文: M. Abe and K. Kawamura, Recursive Fermion System in Cuntz Algebra. I-Embeddings of Fermion Algebra into Cuntz Algebra-, to appear in Comm. Math. Phys.)

有限個の等距離写像から単純  $C^*$ -環として生成される Cuntz 環がその上の自然な  $U(1)$ 作用での固定点として UHF 環を含むことはよく知られているが、それと同型な CAR の fermion 生成消滅演算子が Cuntz 環の生成元で具体的にどう表わされるかは議論されたことがなかった。この論文では Cuntz 環から explicit かつ recursive な形で系統的に無限個の fermion operators が生成されることを明らかにし、それらが Cuntz 環の 2 個の生成元だけで書けることを利用して、Cuntz 環の諸表現とその CAR への制限との間の関係や、CAR の新しい自己同型・準同型、fermions の非線形変換のような、従来の視点では全く想像もされなかった新しい諸結果を導いた。

### 論文審査の結果の要旨

非可換幾何学は、変形量子化法とも相俟って物理学・数学・数理物理学の幾つかの分野では今日議論される機会の非常に多いテーマとなっているが、依然、幾何学的概念と非可換代数の基本概念的な間に横たわる大きなギャップに由来する難しい問題を多く抱えている。それに対して、Cirelli, et al. による非可換代数の「関数環表現」の方法は、作用素環と幾何学の両方の描像を無理なく両立させ、しかも形式べき級数に伴う収束の困難や対合、正值性等、変形量子化法の持つ理論的困難を免れている点で、興味深い alternative approach を提供するものと言える。

申請者の研究で評価に値する着眼点は、主論文（および未発表の幾つかの論文）において、この視点を積極的に採り入れ、更にそれを掘り下げるための研究を独自に展開してきたこと（Serre-Swan 定理の非可換拡張や Hilbert 球上の量子力学と作用素環の議論、等）に加え、上の幾何学的視点から自然に示唆される Lie 環的な手法を用いて、作用素環プロパーの文脈で基本的役割を演ずる接合積・双対性定理に新しい定式化を与えたことである。

この「関数環表現」の方法の立脚点の一つが非可換代数に適用された「スペクトル」の概念にある事情から、申請者自身の主要な関心は、その後、非可換代数の（既約）表現を具体的に詳しく解析することに向かい、参考論文にみられるような形で Cuntz 環の構造とその表現の詳しい研究を展開することになった。しかし、ここに提示された幾つかの視点は、それ自体としてももう少し掘り下げるべき余地を残している（例えば本来の竹崎双対性定理との異同点についての解明、等）と同時に、導入された手法を更に系統的に展開することで非可換代数・非可換群を含む接合積と双対性の問題を深く掘り下げる上で有効な働きをすることが期待される内容を持っている。

参考論文における Cuntz 環とその部分環や、自己同型・準同型の構造、表現に関わる研究は、極く限られた研究者を除いて殆ど一般論だけで済まされていた分野に、新たな具体性と系統性を与える意欲的研究の一端で、十分評価に値する内容を持っている。この方向での申請者の研究は、単独および共同研究者を巻き込んできわめて精力的に展開され、現在、再び上のような幾何学的視点との交流の局面をも回復しつつある。この両者が有機的に結びつけられるなら、今後実り多い成果が期待できるものと考えられる。

以上のように、本申請論文は、将来性のある視点を独自に導入し、今後の課題への展望を与えた研究として評価すべき内容を備え、理学博士の学位論文として価値あるものと認められる。なお、平成14年3月25日に、主論文に報告された研究業績を中心としこれに関連した研究分野について試問をおこなった結果、合格と認めた。