

氏 名 むろ た かず お 雄  
 学位(専攻分野) 博 士 (理 学)  
 学 位 記 番 号 論 理 博 第 1408 号  
 学位授与の日付 平 成 14 年 9 月 24 日  
 学位授与の要件 学 位 規 則 第 4 条 第 2 項 該 当  
 学位論文題目 Discrete Convex Analysis  
 (離散凸解析)

論文調査委員 (主 査)  
 教 授 高 橋 陽 一 郎 教 授 河 合 隆 裕 教 授 森 重 文

### 論 文 内 容 の 要 旨

本学位申請論文は、その題目「離散凸解析」が示す通り、数理計画法における離散最適化問題（もしくは、組合せ最適化問題）に対して、連続非線型最適化問題の場合にその理論体系の基礎を与える凸解析に相当する数学的理論体系を、極めて自然な一般性のある形で、ネットワークフロー理論とマトロイド理論に基礎をおいて構築したものである。

申請者は、既に、参考論文2において、整数格子上の整数値関数に対するマトロイド交換関係を拡張して定義される付値マトロイドに対してマトロイド理論の拡張を行い、参考論文1においては、付値マトロイドの概念をさらに拡張することにより、M凸関数の概念を到達していた。さらに、参考論文3においては、ネットワークフローを構成することによりM凸関数に対する分離定理を証明していた。同時に、期待される離散凸解析の構築には種々の困難が生じ、離散版においては凸関数の概念も一義的に定まるものでないことも既に判明していた。

本論文では、まず、マトロイド理論においてもうひとつの柱である劣モジュラー性に着目し、これを拡張することにより、L凸関数の概念を導入し、M凸関数とL凸関数が離散ルジャンドル変換のもとで互いに共役な関係にあること（共役性定理）を示した。この定理はマトロイド理論における交換関係と劣モジュラー性の同値性を一般化したものであり、これにより、M凸性とL凸性が、互いに同値な2つの組合せ構造の表現であり、表裏の関係にあることが明らかになった。

さらに、申請者は核心部分に踏み込むことに成功し、M凸関数とL凸関数のそれぞれに対して離散型のHahn-Banachの分離定理（離散分離定理）が成立し、これらの間にはFenchel型の最大最小定理が成立することが証明した。これらは、離散版凸関数として提唱されてきた諸定義の中で著者の導入した2つの概念が適切かつ極めて自然なものであることを示すと同時に、劣モジュラー関数に対するFrankの分離定理、Edmondsの交わり定理、藤重によるFenchel型最大最小定理（付値マトロイドに対する一般化は参考論文2）、重み付きマトロイドに対するFrankの重み分割定理など、これまでマトロイド理論において知られていたほとんどすべての双対定理を包括する一般的な結果である。

### 論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

本学位申請者室田一雄は、既に、数理工学において多くの業績を挙げてきており、かつ、工学から数理科学に至る広範な領域に関し確かな見識を有することでも広く知られている。

本申請論文「離散凸解析」は、数理計画法における離散最適化問題（もしくは、組合せ最適化問題）の数学的基礎として、連続最適化問題の場合にその理論体系の基礎を与えた凸解析の離散版を、ネットワークフロー理論とマトロイド理論を土台にして極めて自然な数学的理論体系として構築したものであり、もって、数理工学における基礎理論としての離散凸解析を提唱するものである。

マトロイドの概念は1935年 H. Whitney が基底交換公理と集合関数の劣モジュラー性との同値性を認識したことに遡り、1960年代 J. Edmonds により交わり定理が発見され、「多面体的方法」が創始されて組合せ最適化の分野が開花した。1980年代始めに、藤重悟、A. Frank、L. Lovasz が劣モジュラー関数に対する双対性、その線型拡張の凸性等を発見し、離散版

凸解析に向けての模索が始まった。

1994年に申請者は A. Dress と W. Wenzel と出会い、彼らが1990年に導入していた「付値マトロイド」の重要性を看破、翌年、付値マトロイドに対する交わり定理を証明、それを拡張して「M 凸関数」を導入、ネットワークフローの構成により分離定理の証明にも成功した。同時に、離散版凸関数の概念は一義的に定まるものでないことも明らかとなった。

本論文では、まず、劣モジュラー性を拡張することにより、L 凸関数の概念を導入、交換関係と劣モジュラー性の同値性を一般化して M 凸関数と L 凸関数の共役性定理を示し、M 凸性と L 凸性の関係を明らかにした。さらに、双対性に関して、それぞれに対する分離定理、これらの間の Fenchel 型の最大最小定理の証明にも成功した。

これらの結果は、数多く提唱されてきた諸定義の中で申請者の導入した2つの離散版凸関数の概念が適切かつ極めて自然なものであることを示すと同時に、これまでマトロイド理論において知られていた双対定理をほとんどすべて包括する結果であり、国内外で極めて高く評価されている。

なお、これらの一連の数学的業績は、離散数理計画法の基礎理論として応用面での発展も期待され、本論文以後の著書「離散凸解析」(2001年)に見られるように、最適化アルゴリズムも既に得られ始めており、また、数理経済学における均衡理論のモデルも離散凸解析の枠組で論じられている。

以上のように、本申請論文は数学において離散凸解析を確立した業績として極めて価値の高いものであり、博士号(理学)を授与するにふさわしいものと判断する。