

氏名	せき 関 じげ のり 穰 慶
学位(専攻分野)	博士 (人間・環境学)
学位記番号	人博第149号
学位授与の日付	平成14年3月25日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
研究科・専攻	人間・環境学研究科人間・環境学専攻
学位論文題目	Discrete Torsion and Branes in M-theory and their Mathematical Aspects (M理論におけるディスクリート・トーシオンとブレーンとそれらの数学的側面)
論文調査委員	(主査) 教授 松田 哲 教授 植松 恒夫 教授 青山 秀明 助教授 高崎 金久

論 文 内 容 の 要 旨

近年、素粒子の統一理論 (*Theory of Everything*) の候補として、弦理論や M 理論が盛んに研究されてきた。その中でも超弦理論は10次元の理論であるが我々の実際の時空は4次元なので、実際の世界を記述する理論を導くためには何らかのコンパクト化が必要と考えられる。これまで様々なコンパクト化が考えられてきたが、本学位申請論文ではオービフォルドに注目している。

超弦理論におけるオービフォルドについては多くの研究がなされており、ディスクリート・トーシオンという位相が定義されている。この位相は閉弦と開弦のそれぞれに対して定義されており、それらは互いに関係づけられている。オービフォルド群を Chan-Paton 因子に作用させる際、そのオービフォルド群の表現として projective 表現を採ることができ、その際に現れる位相が開弦に対するディスクリート・トーシオンである。

M 理論は膜の理論であり、超弦理論との間に双対性をもつ理論として知られている。超弦理論に対するオービフォルド及びディスクリート・トーシオンについては既に研究されていたが、M 理論におけるディスクリート・トーシオンについてはほとんど研究されていなかった。そこで、本学位申請論文では、M 理論におけるオービフォルドを数学的手法を用いて調べ、開膜に対するディスクリート・トーシオンを新たに定義し、それが弦理論におけるディスクリート・トーシオンでは現れなかった新たな構造を持つことを一般的に示した。

本論文第1章では導入部分として、弦理論におけるオービフォルドとディスクリート・トーシオンに関するこれまでの研究の経緯が紹介されている。まず、閉弦に対するディスクリート・トーシオンが閉弦の1-ループ分配関数における twisted sector の寄与から導かれることを紹介している。また、開弦に対しては、具体的に $C^3/Z_n \times Z_n$ なるオービフォルドを考え、 $n \times n$ の行列を用いてオービフォルド群の projective 表現を記述している。さらに、この開弦に対するディスクリート・トーシオンと、オービフォルド特異点にある D3-brane 上の world-volume 理論のモデュライの非可換性との関係がコメントされている。一方、非自明な B 場を 1-gerbe と呼ばれるもので記述することによって、先ほど導入された弦理論におけるディスクリート・トーシオンを数学的に自然に導出する方法も紹介されている。

第2章では、M 理論におけるディスクリート・トーシオンについて述べられている。始めに閉膜 (T^3 に巻きついた膜) に対するディスクリート・トーシオンの数学的導出が簡単に紹介されている。そして、開膜に対するディスクリート・トーシオンについて数学的手法を用いて議論されている。この議論が本学位申請論文の1つの中心である。3-フォーム C 場を 2-gerbe で記述する。2-gerbe は各開被覆 $\{U_\alpha\}$ 上で定義された 3-フォームと $U_\alpha \cap U_\beta$ 上で定義された 2-フォームと $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ 上で定義された 1-フォームと $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \cap U_\delta$ 上で定義された 0-フォームで構成される。開膜は M5-brane に端を持つので、M5-brane 上の world-volume 理論における 2-フォーム B 場と 1-フォームゲージ場を考え、これらも同様にそれぞれ 1-gerbe と 0-gerbe を用いて各開被覆上で定義する。そして、これら 3つの場に対するオービフォー

ルド群の作用を計算する。この際に、幾つかの新たなパラメータを導入する必要があり、それらの間にはオービフォルド群の結合関係 (associativity) 等からくる条件が課される。特に、場がトポロジカルに自明であるとき、オービフォルド群は 1-フォーム場への作用に関して projective 表現 ($\rho^g \rho^h = \theta^g \cdot \rho^{gh}$) を採ることが示されている。さらに、その表現に現れる位相 $\theta^g \cdot \rho^h$ が弦理論では現れなかった非自明な構造 ($\theta^{g^1 g^2} \cdot \theta^{g^3 g^1} \cdot \theta^{g^2} = \gamma^{g^1, g^2, g^3} \theta^{g^1, g^2 g^3} \theta^{g^2, g^3}$) を持つことを示しており、 γ^{g^1, g^2, g^3} は 3 次群コホモロジーで分類され、3-フォーム C 場由来する。これが M 理論における開膜に対するディスクリート・トーションであると本論文で初めて提案された。

以上のディスクリート・トーションを導出する際に 3-フォーム C 場と 2-フォーム B 場との間の関係を弦理論からの類推で書き下したが、第 3 章ではこの関係を、C 場や brane 上の場を stack を用いてより数学的に厳密に記述することにより、自然に導き出している。stack は素粒子論の分野ではまだ馴染みの薄い数学であるため、まず、圏 (category) と stack と gerbe についての解説を与えている。そして、弦理論において、2-フォーム B 場と 1-フォームゲージ場をそれぞれ 1-stack とその stack 上の層 (sheaf) とで表すことが出来、これらの場との関係を自然に記述できることを紹介している。この弦理論における解析からの類推で、本論文では、M 理論における 3-フォーム C 場を 2-stack で表し、brane 上の 2-フォーム B 場をその 2-stack 上の 1-stack で記述している。1-stack は 1-圏の層であり、2-stack は 2-圏の層である。圏は morphism を持ち、特に、2-圏は 1-morphism と 2-morphism という 2 種類の morphism を持つ。そこで、2-stack 上の 1-stack が持つ morphism から構成された自己同型 morphism と、2-stack の 2-morphism から構成された自己同型 morphism とから、ディスクリート・トーションを導く際に重要な働きをした 3-フォーム C 場と 2-フォーム B 場との関係が自然に導かれることを示している。また、より高階のテンソル場に対して n-stack を用いることが出来る可能性についてコメントしている。

第 4 章では、結果のまとめと今後の展望が述べられている。オービフォルド $R \times C^2 / \Gamma$ の特異点にある M5-brane 上の 6 次元超対称ヤン-ミルズ理論のモデュライが、M 理論のディスクリート・トーションを導入することにより、弦理論の時に見られる非可換性のような構造を持つであろうと予想している。また、弦理論では開弦の端に付いている Chan-Paton 因子が知られているが、M 理論においては開膜の端にどのような因子が付いているのか正確には知られていない。今後 M 理論やその中での brane 上の world-volume 理論を考えるためにも、その因子をつきとめることの必要性を指摘している。K 理論や stack はその目的の助けとなるであろうと考え、2-stack の morphism の複雑さが開膜の端にあるべき Chan-Paton 因子類似物の複雑さを反映している。さらに、n-stack の morphism はさらに複雑な構造を持ち、これが開 Dn -brane の Chan-Paton 因子類似物のさらなる複雑さに対応していると考えている。

論文審査の結果の要旨

素粒子理論において前世紀未解決な問題は量子重力である。その量子重力を組み込んだ万物の最終的統一理論 (TOE, *Theory of Everything*) として、近年盛んに、超弦理論およびそれをさらに発展させた M 理論 (膜の理論) が精力的に研究されている。超弦理論はその整合性から 10 次元理論の自由度を内包するが、我々の時空の 4 次元理論として理論構築をするためには、余剰 6 次元のコンパクト化が必要となる。このコンパクト化された自由度は、素粒子の多様性を記述するものと考えられる。

超弦理論ではこれまで様々なコンパクト化が考えられてきたが、本学位論文申請者は、M 理論におけるオービフォルド多様体に基づくコンパクト化に注目する。

本論文第 1 章では、弦理論におけるオービフォルドとディスクリート・トーションに関するこれまでの研究の経緯を紹介する。開弦と閉弦のそれぞれに対してディスクリート・トーションという位相が定義され、互いに関係づけられることを示す。閉弦に対するディスクリート・トーションが閉弦の 1-ループ分配関数における twisted sector の寄与から導かれることを紹介し、また、開弦に対しては、オービフォルド群を Chan-Paton 因子に作用させる際の群の表現として projective 表現を採ることができ、その際に現れる位相が開弦に対するディスクリート・トーションであることを示す。

第 2 章で、本論文の主題である M 理論におけるディスクリート・トーションが議論されている。始めに閉膜 (T^2 に巻き付いた膜) に対するディスクリート・トーションの数学的導出を紹介し、次いで、開膜に対するディスクリート・トーシ

ンについて, gerbe, フォームといった数学的手法を用いて詳しく論じている。3-フォーム C 場を 2-gerbe で記述し, 開膜は M5-brane に端を持つので, M5-brane 上の world-volume 理論における 2-フォーム B 場と 1-フォームゲージ場をそれぞれ 1-gerbe と 0-gerbe を用いて定義する。そして, これらの 3 つの場に対するオービフォールド群の作用を計算する。この際に, いくつかの新たなパラメータを導入する必要性を指摘し, それらの間にオービフォールド群の結合関係 (associativity) 等からくる条件を課すことによって, 特に, 場がトポロジカルに自明であるとき, オービフォールド群は 1-フォーム場への作用に関して projective 表現を採ることを示す。さらに, その表現に現れる位相が弦理論では現れなかった非自明な構造を持つことを示し, その構造が 3 次群コホモロジーで分類され 3-フォーム C 場に由来することを指摘し, これが M 理論における開膜のディスクリート・トーシオンであることを初めて提案した。

第 3 章では, C 場や brane 上の場を stack を用いてより数学的に厳密に記述することにより, 前章でディスクリート・トーシオンを導出する際に弦理論からの類推で書き下した 3-フォーム C 場と 2-フォーム B 場との間の関係を自然に導出している。stack は素粒子論の分野ではまだ馴染みの薄い数学であるため, まず, 圏と stack と gerbe についての解説を与え, 弦理論においては, 2-フォーム B 場と 1-フォームゲージ場をそれぞれ 1-stack とその stack 上の層とで表すことが出来, これらの場の間の関係を自然に記述することが可能であることを論じている。この弦理論における解析からの類推に基づいて, 本学位申請論文では, M 理論における 3-フォーム C 場を 2-stack で表し, brane 上の 2-フォーム B 場をその 2-stack 上の 1-stack で記述する。1-stack は 1-圏の層であり, 2-stack は 2-圏の層である。圏は morphism を持ち, 特に, 2-圏は 1-morphism と 2-morphism という 2 種類の morphism を持つ。そこで, 2-stack 上の 1-stack が持つ morphism から構成された自己同型 morphism と, 2-stack の 2-morphism から構成された自己同型 morphism とから, ディスクリート・トーシオンを導く際に重要な働きをした C 場と 2-フォーム B 場との間の関係が自然に導かれることを示している。また, より高階のテンソル場に対して n -stack を用いることが出来る可能性についてもコメントし, 今後の研究の方向性を与えている。

第 4 章では, 申請者が考察するオービフォールドの特異点にある M5-brane 上の 6 次元超対称ヤン・ミルズ理論のモデュライが, M 理論のディスクリート・トーシオンを導入することにより, 弦理論の時のような非可換性のある構造を持つであろうと予想している。また, 弦理論では開弦の端に付く因子として Chan-Paton 因子が知られているが, M 理論においては開膜の端にどのような因子が付いているのか正確には知られていない。従って, 今後 M 理論やその中での brane 上の world-volume 理論を考えるためにも, その因子をつきとめることが必要であると指摘している。K 理論や stack はその目的の助けとなるであろうと考え, 2-stack の morphism の複雑さが開膜の端にあるべき Chan-Paton 因子類似物の複雑さを反映していると考察している。さらに, n -stack の morphism はさらに複雑な構造を持ち, これが開 Dn -brane の Chan-Paton 因子類似物のさらなる複雑さに対応していると考えられると指摘している。

超弦理論におけるオービフォールドについては多くの研究がなされており, ディスクリート・トーシオンという位相が定義されている。M 理論は膜の理論であり, 超弦理論との間に双対性をもつ理論として知られているが, M 理論におけるディスクリート・トーシオンについてはほとんど研究されていなかった。

このような M 理論の進展状況において, 本学位論文申請者は, M 理論におけるオービフォールドとディスクリート・トーシオンの関係を素粒子論の分野ではまだ馴染みの薄い gerbe, 圏 (category), stack, 層 (sheaf) といった数学的概念と手法を用いて研究し, 開膜に対するディスクリート・トーシオンを新たに定義し, C 場や brane 上の場を stack を用いてより数学的に厳密に記述することを試み, それらの場の間の具体的関係を自然に導出することに成功している。そして, その結果が弦理論では見られなかった新たな構造を持つことを一般的に提示した。今後の研究の方向性と展望についても発展的に詳細に論じており, その研究成果は高く評価される。また, 本学位申請論文は, 人間・環境学専攻自然環境論講座の自然構造基礎分野にふさわしい内容を備えたものと言える。

よって本論文は博士 (人間・環境学) の学位論文として価値あるものと認める。また, 平成 14 年 1 月 25 日, 論文内容とそれに関連した事項について諮問を行った結果, 合格と認めた。