氏名 前川和俊（まえがわ かずとし）

学位(専攻分野) 博士（人間・環境学）

学位記番号 人博第152号

学位授与の日付 平成14年3月25日

学位授与の要件 学位規則第4条第1項該当

研究科・専攻 人間・環境学研究科環境相関研究専攻

学位論文題目 Dynamics of birational maps of complex projective spaces
（複素射影空間の双有理写像の力学系）

論文調査委員 （主査）教授 上田哲生　教授 宇敷重廣　助教授 木坂正史

論文内容の要旨

前世紀初頭のFatou, Juliaらによる1変数有理関数の反復合成（iteration）の理論は，1980年代以後，複素解析学の様々な手法の発展にともなって，複素力学系として大きな発展を見せ，さらにエノン写像をはじめとする2次元複素数空間の多項式自己同型，あるいは一変数の場合のリーマン球面の拡張である複素射影空間の上の正則写像など一般次元の場合へも広がりを持つに至っている。

本申請論文は，一般次元の複素射影空間の上の有理写像の反復合成により生ずる複素力学系を主題とするものである。本論文は三章からなる。第一章では射影空間上の有理写像について，その不定点とファトゥ集合の関係を中心に考察する。第二章では3次元複素数空間の2次多項式同型写像の（多項式自己同型による）共役類の分類を与え，これらの写像およびその逆写像の力学的次数を求める。第三章では，前章に与えた標準形の1つについて，グリーン関数の構成と各点の軌道との関係の考察を行う。

第一章では，まず複素射影空間からそれ自身への有理写像により生ずる力学系，すなわち写像の反復合成からなる写像列による空間内の点の挙動の研究を行う。ファトゥ集合はこの写像列が正規族をなすような最大の開集合と定義され，複素力学系の立場から最も基本的な対象である。また写像によって（定数倍を除いて）不変なカレント—グリーン・カレントとよばれる—が射影空間上に定義される。2次元以上の場合，有理写像は一般に不定点をもち，これが力学系の考察を複雑にする理由となっている。そこで，この不定点とファトゥ集合，グリーン・カレントとの関係が重要な考察の対象となる。射影空間上の点が正則点（regular point）であるとは，その近傍の軌道が不定点に接近しないことであると定義される。Fornaess-Sibonyらの結果を深めたものとして次のことが示される：(1)ファトゥ集合はグリーン・カレントが消える領域に含まれる；(2)ファトゥ成分（ファトゥ集合の連結成分）は，正則点のみからなるものと，非正則点のみからなるものの2種に分類される；(3)正則点からなるファトゥ成分は擬凸領域である。さらにファトゥ成分が小林双曲的であるための条件が与えられる。

次に第一章後半では，射影空間上の双有理写像，すなわち逆写像をもつ有理写像を取り扱う。主要な結果として，その近傍が逆写像の不定点に接近しない点はファトゥ集合に属することを示す。これはエノン写像の場合の滞留点集合の内点がファトゥ集合となるという事実の一般化である。さらにこの応用として，双曲的不動点の安定多様体が，不定点集合に集積することを示す。

第二章では，双有理写像の特別な場合である複素数空間の多項式自己同型の共役類の分類を考察する。2次元の場合については一般次数の自己同型写像の分類がFriedland-Milnorによってなされているが。3次元以上の場合について，一般的な分類は未解決の困難な問題である。そこで，ここでは3次元で2次の場合を取り扱う。このような多項式自己同型の共役類は，アフィン写像（A），半直積（$E_1 \sim E_3$, F_1, F_2）あるいはシフト型写像（$G_1 \sim G_6$, H_1, H_2）の3族に分けられるという結果を得ている。

また，この自己同型写像と，その逆写像の力学的次数（dynamical degree）の組である力学的双次数は（1，1)，（$\sqrt{2}$，2)，（ϕ，ϕ)，（ϕ，2)，（2，$\sqrt{2}$)，（2，ϕ)，（2，2)，（2，3)，（2，4）の９種のいずれかであることを示す（ϕ は黄金比を表わす)。この結果は今後の，３次元多項式自己同型の，力学系の立場からの研究の出発点となるものである。

第三章では，前章で得られた３次元２次多項式自己同型の標準形のうちのシフト型写像の一つ

$$(x, y, z) \to (y, z, yz+by+cz+dx+e)$$

について，力学系の立場からの研究を行う。この写像の反復合成列の次数はフィボナッチ数列をなし，従って力学的双次数は（ϕ，ϕ）となる。このような現象は３次元（以上）の場合にはじめて現れるので，特にこの例に注目している。２次元多項式自己同型の場合と同様に，各点の軌道の発散の速さを表わす量として定義されるグリーン関数が，この場合についても構成できることを示す。この構成は，空間を分割し，その中での点の軌道を追跡することでなされている。さらにグリーン関数が多重調和となる領域の解析的および位相的性質を調べている。

この他にも，２次元の多項式自己同型の場合には見られない新しい現象を指摘する。すなわち，(1)非遊走集合はパラメータに依存して，コンパクトである場合もそうでない場合もある。(2)グリーン関数の零点であっても，その軌道が発散することがある。すなわち無限遠へ発散する点であっても，その速さの位数が小さいことがある。(3)シュレーダー方程式を満たす正則曲線がグリーン関数の零点集合に含まれれば，多項式曲線である。また実際に(3)の場合があることを，例を挙げて示している。

以上のように，本論文は複素射影空間上の有理写像のなす力学系を主題に，特にファトゥ集合の構造および不定点との関係，３次元の多項式自己同型写像の分類および個別の例についての詳細な研究を行い，多くの新しい知見を報告したものである。

論文審査の結果の要旨

高次元複素力学系の分野において，Hénon 写像によって代表される２次元複素数空間の多項式自己同型写像，あるいは複素射影空間の正則写像により生ずる力学系の研究は近年著しい発展を見せている。これらを統合した一般的枠組みとしての複素射影空間の有理写像（およびその特別かつ重要な場合である双有理写像さらに一般次元複素数空間の多項式自己同型）の力学系の研究はこの分野での主要な課題であると言うことができる。ここでの大きな問題は不定点の存在に伴う新しい現象を理解することにある。

本申請論文は，この課題の基礎付けを与えると共に，具体的な例を取り上げて種々の現象を解明したものである。第一章では射影空間上の有理写像について，その不定点とファトゥ集合の関係を中心に考察している。第二章および第三章では，３次元複素数空間の２次多項式同型写像について，その分類およびグリーン関数と各点の軌道との関係の考察を行っている，複素数空間の上の多項式自己同型はこの空間のコンパクト化である射影空間における双有理写像と考えられるので，第二，第三章は第一章のより具体的な例を研究したものであると見なすことができる。

ファトゥ集合は複素力学系の立場から最も基本的な対象であるが，第一章前半では，射影空間の上の有理写像について，その不定点とファトゥ集合との関係を考察している。射影空間上の点が，与えられた有理写像に関して正則点（regular point）であるとは，その近傍の軌道が不定点に接近しないことであると定義した上で，主要な結果として次のことを示している：(1)ファトゥ集合はグリーン・カレントが消える領域に含まれる；(2)ファトゥ成分（ファトゥ集合の連結成分）は，正則点のみからなるものと，非正則点のみからなるものの２種に分類される；(3)正則点からなるファトゥ成分は擬凸領域である。さらにファトゥ成分が小林双曲的であるための条件を与えている。これらは，先行する Fornaess-Sibony らの結果を改良するものであり，この理論での基本的な成果であると評価される。

第一章後半では，射影空間上の双有理写像を取り扱っている。主要な結果として，その近傍が逆写像の不定点に接近しない点はファトゥ集合に属することを示している。この応用として，双曲的不動点の安定多様体が，不定点集合に集積することを示したのは注目に値する。

第二章では，双有理写像の特別な場合である３次元多項式自己同型を取り扱っている。一般の多項式自己同型の共役による分類は，２次元の場合については Friedland-Milnor によって与えられているが，３次元以上の場合は非常に困難な問題

として残されている。この状況の中で，申請者は３次元の２次多項式自己同型の共役による分類を与えた。すなわち，このような多項式自己同型は，アフィン写像，半直積，あるいはシフト型写像のいずれかに共役であることを示した。さらに，これらの力学的双次数（dynamical bi-degree）を求めている。この結果は，今後の３次元多項式自己同型の，力学系の立場からの精密な研究のための基礎を与えたものとして高く評価される。

第三章では，前章で得られた３次元２次多項式自己同型の標準形の一つについて，力学系の立場からの研究を行っている。この写像の反復合成列の次数はフィボナッチ数列をなし，従って力学的次数は黄金比となる。２次元多項式自己同型の場合には，各点の軌道の発散の速さを表わす量としてグリーン関数が定義されるが，３次元の場合，このようなグリーン関数の構成は一般には困難な問題である。申請者は，この例について，空間を分割してその中での点の軌道を追跡することでグリーン関数を構成している。さらにグリーン関数が多重調和となる領域の解析的および位相的性質を調べている。この他にも，２次元の多項式自己同型の場合には見られない新しい現象を見出している。すなわち(1)非遊走集合はパラメータに依存して，コンパクトである場合もそうでない場合もある；(2)グリーン関数の零点であっても，その軌道が発散することがある；(3)シュレーダー方程式を満たす正則曲線がグリーン関数の零点集合に含まれれば，多項式曲線である。３次元多項式自己同型写像は，個々の共役類について力学系としての性質が大きく異なり，具体的かつ綿密な考察が必要となる。この考察を実際に行った例として，この研究の意義は大きく，さらに発展することが期待される。

以上のように，本研究は複素射影空間上の有理写像のなす力学系，特にファトゥ集合の構造および３次元の多項式自己同型写像に関して，複素解析学の立場から多面的な考察を行い多くの新しい知見を得たものである。これらの研究成果は，学会において発表されるとともに，学術論文として公表され，高次元複素力学系の分野において重要な貢献をなしている。また本学位申請論文は，本研究科環境相関研究専攻環境認識表象論講座にふさわしい内容を備えたものと言える。

よって本論文は博士（人間・環境学）の学位論文として価値あるものと認める。また，平成14年１月22日，論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果，合格と認めた。