氏　　　名	西　村　治（にし むら おさむ）
学位(専攻分野)	博　士（理　学）
学位記番号	理　博　第2418号
学位授与の日付	平成14年3月25日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
研究科・専攻	理学研究科数学・数理解析専攻
学位論文題目	Classification theorems for cohomology rings of finite H-spaces （有限H空間のコホモロジー環の幾つかの分類定理）
論文調査委員	（主　査） 教　授　河　野　　明　　教　授　西　田　吾　郎　　助教授　國　府　寛　司

論　文　内　容　の　要　旨

p を素数とし，(X, μ) を1-connected, p-local, finite H-spac とする。（考える空間は全て CW-complex の homotopy type を持つこととする。）このとき X の mod p cohomology $H^*(X; F_p)$ は associative, commutative, Hopf algebra であり，特に Borel decomposition を持つ。すなわち，幾つかの単生成な Hopf algebra の tensor product に，algebra として同型である。$H^*(X; F_p)$ の構造についてはさらに幾つかの結果が知られている。例えば，ΩX の integral homology は（p-)torsion を持たないことが知られており，このことにより $H^*(X; F_p)$ の構造は大きく制限される。

申請者の主論文「Classiflcation theorems for cohomology rings of finite H-spaces」の目的は，X の積 μ に関するある associativity の仮定のもとで $H^*(X; F_p)$ の構造を詳しく調べることである。簡単のために以下 μ は homotopy associative であるとする。このとき主論文において以下の定理を示した。ここに F_4, E_8 はそれぞれ rank が4, 8の compact simple exceptional Lie group を表すとする。

定理１（$p=3$ の場合）$H^*(X; F_3)$ は F_4, E_8, および奇数次元の球面の有限個の積の mod 3 cohomology に algebra として同型である。

定理２（$p=5$ の場合）$H^*(X; F_5)$ の Borel decomposition において偶数次元の Borel generator の degree は全て12（取り得る最小の degree）であるとする。このとき $H^*(X; F_5)$ は E_8 および奇数次元の球面の有限個の積の mod 5 cohmology に algebra として同型である。

（主論文では $p=3$, 5の場合について述べているが主論文で用いられた方法は任意の p に関して適用できる。特に $p=2$ の場合に興味深い応用があると考えられる。）

以下，上の定理の証明のアイデアを述べる。$K(n)$ を（p に対する）n-th Morava K-theory とする。（n としては例えば上の定理では $n=2$, 3を考える。）さて，まず $H^*(X; F_p)$ の良い Borel decomposition をとる。その任意の偶数次元の Borel generator z に対して，ある $H^3(X; Z)=[X, K(Z, 3)]$ の元 $f_z: X \to K(Z, 3)$ を考え，$K(n)_*(K(Z, 3))$ に関する結果を用いることにより $z^\# \in H_*(X; F_p)$（z の双対元）の $K(n)_*(X)$ における振る舞いを調べることができる。これを元にして $K(n)_*(X)$ の commutator を考察して，その結果を $H_*(X; F_p)$ に引き戻すことにより，$H^*(X; F_p)$ の偶数次元の Borel generator の数に対応して一定の数の奇数次元の Borel generator を見つけることができる。（なおこのようにして見つけた奇数次元の Borel generator は primitive でないことも同時にわかる。）以上が証明の概要である。

定理の系としていろいろ考えられるが，例えば簡単に述べられるものとして次がある。ここに $X(p)$ は Harper により構成された mod p H-space とする。

系１ p は3または5とし，X は有限個の $X(p)$（１個以上）と有限個の compact, 1-connected, simple, exceptional Lie groups（G_2, F_4, E_6, E_7, E_8）の積とする。このとき X は H-space であるが homotopy associative な積を持ち得ない。

論文審査の結果の要旨

Lie 群や位相群をホモトピー論的に一般化した対象として Hopf 空間がある。Hopf 空間は連続な積でホモトピー論的な意味での単位元を持つ位相空間のことである。Hopf 空間についてはその体係数の cohomology 環が Hopf 代数の構造を持つなど位相群の場合との類似が多くみられる。

Hopf 代数については Borel の構造定理により一つの元で生成される代数の積になっていることが知られている。Hopf 空間で cohomology が有限次元ベクトル空間になる物が特に重要である。このような Hopf 空間の cohomology として，実際にどのような次元の生成元を持つ物があるかは大きな問題である。特にその整数係数の cohomorogy が p-torsion を持つような素数 p について生成元の次元は興味深い問題である。

Harper は生成元の次元の形が Lie 群とは異なる Hopf 空間を構成した。しかしこの Hopf 空間の積はホモトピー結合的でないことが知られている。従って最近のホモトピー論の研究者の間ではこの問題でホモトピー結合性を仮定した場合に生成元の次元の形ががどうなるかという問題が重要になってきた。実際ホモトピー結合性を仮定した場合 Lie 群と異なる生成元の次元の形を持つ物は知られていない。また素数が 7 以上の場合 p-torsion を持つ例も知られていない。

申請者西村治氏はこの問題について研究し，p が 3 または 5 の場合に Hopf 空間がホモトピー結合的な積を持つならばその cohomology の生成元の次元の形は例外 Lie 群の物ときわめて近いという結果を証明しました。この証明には Morava K-理論という最近発達してきた道具を巧妙に用います

この成果は代数的位相幾何学の研究グループの中で極めて高い評価を得ております。また参考論文で得られた成果も Hopf 空間の研究として重要な物が多く含まれております。

以上のように申請者西村治氏の成果はきわめて優れた物であり博士（理学）の学位論文として充分な物と認め合格と判定しました。