氏　　　名	稲生啓行（いのう ひろゆき）
学位(専攻分野)	博　士（理　学）
学位記番号	理　博　第 2395 号
学位授与の日付	平成 13 年 7 月 23 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当
研究科・専攻	理学研究科数学・数理解析専攻
学位論文題目	Renormalization and rigidity of polynomials of higher degree （高次多項式のくりこみと剛性について）
論文調査委員	（主　査） 教授 河野　明　　教授 宍倉光広　　教授 宇敷重廣

論文内容の要旨

Riemann 面上での多項式 f の反復合成による力学系を考える。力学系がカオス的に振舞うところを Julia 集合，そうでないところを Fatou 集合と呼ぶ。多項式を充塡 Julia 集合（Julia 集合とそれによって囲まれた部分）の近傍に制限した力学系の一般化されたものとして，多項式類似写像とよばれるものがある。Douady と Hubbard により任意の連結な Julia 集合をもつ多項式類似写像は affine 写像での共役を除いて一意的にある多項式と hybrid 同値であることが知られている。

分岐点 c_0 のある近傍 U, V があって f の n 回合成 $f^n: U\to V$ が連結な Julia 集合をもつ多項式類似写像となり，f の各分岐点が途中の $f^k(U)(0\leq k\leq n-1)$ たちに高々 1 度しか含まれないとき，この組（f^n, U, V）を c_0 のまわりの周期 n のくりこみという。各くりこみに対し，その充塡 Julia 集合およびその f^k による像を小充塡 Julia 集合と呼び，くりこみの分岐軌道（分岐点の軌道全体の閉包）と各小充塡 Julia 集合の共通部分を小分岐軌道と呼ぶ，これは 2 次多項式でのくりこみ（分岐点の近傍で n 回合成がまた 2 次の多項式類似写像になる）の自然な一般化であり，2 次多項式の場合とまったく同じように，以下のような性質が成り立つことがわかる。

まず，小充塡 Julia 集合同士は高々 f^n の反発的不動点 1 点のみで交わる。この交点（もしあれば）を充塡 Julia 集合から除いたものが連結なとき，くりこみは単純であるという。単純なくりこみたちは現れる分岐点を固定するとその充塡 Julia 集合たちが包含関係に関して全順序集合となる。単純でなくても分岐点の時間も含めた情報のみで充塡 Julia 集合の関係はわかるので，これは 2 次多項式の場合は明らかなことである（分岐点が c_0 しかないからである）が，分岐点が複数あるときは外射線などを用いて Julia 集合の反発的周期点のまわりの位相的性質を非常に注意深く見ることが必要となる。さらに，f が無限回くりこみ可能なとき，適当な部分をくりこみによって取り出して（それと hybrid 同値な多項式を考えて）c_0 以外の分岐点の挙動を注意深く見ることにより，f は単純なくりこみを無限個もつことがわかる。

この証明と同じ手法で単純なくりこみが無限個ある部分のみを取りだすことができる。このとき無限個のくりこみに対して各小分岐軌道同士が十分「離れて」いるとき，もとの多項式は robust に無限回くりこみ可能であるという。このとき分岐軌道は Cantor 集合となり，その上での力学系は odometer と共役になる。このことを利用して分岐点が再帰的であることや，十分大きな周期のくりこみに対しては分岐点は一度に 1 つしか現れないこともわかる。しかし時刻が違えば 2 つ以上の分岐点が現れうる。実際，実の区間力学系の結果を応用することで本質的に複数め分岐点を無限回くりこみ可能な部分にもつ多項式の例も構成できる。

上記の結果を応用することで，McMullen が 2 次多項式に対して示した剛性に関する結果が一般の場合にも示される：

定理（Robust rigidity）。*robust* に無限回くりこみ可能な多項式は *Julia* 集合上に不変線分場をもたない。

不変線分場の非存在性予想は複素力学系の最重要問題である双曲型写像の稠密性予想より強い結果である。「剛性」というのは不変線分場が存在しなければ擬等角写像で共役なとき正則同値になるからである。

くりこみはもとの多項式の一部分を取り出す，という操作にも対応しているので，それを利用することで，不変線分場を

Julia 集合上にもたないことは，局所的に robust に無限回くりこみ可能か subhyperbolic 以外の種類の力学系が現れないような多項式まで拡張できる。

定理は以下のようにして証明される。まず robust に無限回くりこみ可能な多項式 f が不変線分場 μ を持つと仮定する。μ がほとんど連続となるなどのいい性質をもつ点 x をとる。各くりこみ（f^n,， U_n, V_n）に対し，n が十分大きければ V_n から x の近くへ単葉に f の反復合成の逆写像 h_n をとることができる。単葉にとるためには分岐点を避けなければならないが（この議論は 2 次では不要である），これはあらかじめ余計な部分をくりこみによってできるだけ除いておくこと，除けない分岐点はくりこみの Julia 集合の外側にあるか全てのくりこみに現れるかいずれかであることを見ることで可能である。

また，各くりこみを適当に rescaling して部分列をとることで，写像 $f^n: U_n \to V_n$ がある写像 $g: U \to V$ に収束するようにできる。このとき g は V 上の不変線分場 ν（μ を rescale した極限）を持つが，x で μ がほとんど連続であること，$\mu = h_n{}^*\mu$ であること，そして $h_n(V_n)$ が x 一点に収束することなどを使うと，ν は単葉でなければならない。しかし g は分岐点を $U \cap V$ 内にもつため，これは不可能であり，従って定理が証明される。

論文審査の結果の要旨

Riemann 球面上における多項式の反復合成による力学系を考える。何回かの反復合成を一部分に制限したものがまた次数の低い多項式のようにふるまうことをくりこみといい，2 次多項式の力学系の研究において非常に重要な役割を果たしてきた。しかし，これらの結果は 2 次多項式と同様一つしか分岐点を持たない（z^d+c など）多項式には容易に拡張できるものの，一般の（分岐点を複数持つような）多項式への拡張はこれまでほとんどなされていなかった。

くりこみは区間力学系においては単峰写像（turning point が 1 つのもの），複素力学系においては 2 次多項式（および分岐点が 1 つの多項式）において非常に重要な役割を果たしているものの，turning point，分岐点が複数あるものに対してはいままでほとんど研究されていなかった，それは区間力学系においても複素力学系においても転回点や分岐点が非常に重要な役割を果たしており，その軌道を見るだけでも力学系の多くの性質がわかってしまうためそれが 1 つしかないというのは非常に扱い易いからである。特に複素力学系においてはもし分岐軌道のふるまいがわかれば全体の力学系がほぼ完全にわかってしまう。このため分岐点が 1 つの多項式は本質的に（無限回くりこみ可能，吸引的周期点，中立的周期点などのうち）一種類の力学系しかもたず，そこに分岐点そのものが非常に密接に関係するため，その部分以外はまったく調べる必要がないのである。だが分岐点が複数あると，ふるまいは非常に複雑になり，分岐点同士の関係などを詳細に調べる必要が出てくる。

申請者稲生啓行氏はこのくりこみという概念を 3 次以上の多項式にまで拡張し，分岐点の情報を注意深く見ることによって，2 次多項式と同様に無限回くりこみ可能なものは単純なくりこみを無限個持つこと，robust に無限回くりこみ可能なものは分岐軌道が Cantor 集合になり，その上での力学系が odometer になることなどの多くの性質を示した。さらに，2 次多項式において McMullen が示した，robust に無限回くりこみ可能なものは Julia 集合上に不変線分場を持たない，という結果も一般の場合に拡張でき，それによって力学系が局所的に subhyperbolic が robust に無限回くりこみ可能なものしか現れないような多項式は Julia 集合上に不変線分場を持たないことを示した。

また，本質的に高次の（分岐点を複数もつ）無限回くりこみ可能な実多項式の例を，区間力学系の結果を応用することで与えた。これらの例が robust そあることも 2 次多項式と同様にしてわかる。さらに，与えられた n 個の多項式の組を反発的周期点のまわりで擬等角手術によって貼り合わせることで，元の n 個の多項式を合成したものを周期 n のくりこみとして持つような多項式を構成する方法を与えた。これによって多くの有限回くりこみ可能な多項式を構成することができる。さらにこの方法では単純でないくりこみも構成することができる。このような構成法は 2 次多項式においても今まで知られていなかったものである。

以上のように申請者稲生啓行氏の業績は複素力学系理論についての卓越したものであり，この結果により Fields 賞受賞者の McMullen が 2 次多項式の場合に証明した剛性に関する著名な結果を一般の高次の場合に拡張することを可能にしたものであり，大学院在学 5 年未満ではありますが例外的に博士（理学）の学位を授与するのに充分と考えます。