| | |
|---|---|
| 氏 名 | 阿 部 健（あべ たけし） |
| 学位(専攻分野) | 博 士 (理 学) |
| 学 位 記 番 号 | 理 博 第 2399 号 |
| 学位授与の日付 | 平 成 13 年 9 月 25 日 |
| 学位授与の要件 | 学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当 |
| 研 究 科・専 攻 | 理 学 研 究 科 数 学・数 理 解 析 専 攻 |
| 学 位 論 文 題 目 | BOUNDEDNESS OF SEMISTABLE SHEAVES OF RANK FOUR<br>(階数4の半安定層の有界性) |
| 論 文 調 査 委 員 | (主 査)<br>教 授 丸 山 正 樹　助教授 森 脇 淳　教 授 河 野 明 |


## 論 文 内 容 の 要 旨


コンパクトリーマン面の基本群の既約ユニタリ表現から構成されるベクトル束が幾何学的不変式論における安定の概念と同等であることが発見され，安定ベクトル束の概念が導入された。これは非特異射影的多様体上の捩れのない連接層に，さらには純次元の連接層に拡張され，安定層と呼ばれている。不変量を共有する安定層の集合には普遍性を持ったスキームの構造が入り（安定層のモデュライと呼ばれる）その構造自身が豊かな代数幾何学的対象であるのみならず，基底多様体の研究に強力な道具を提供している。この安定層のモデュライが有限型であるか，従って擬射影的であるかどうかは，これを研究対象とする場合，道具として利用する場合，いずれにおいても基本的な問題である。これが安定層の有界性の問題である。安定層の有界性が成り立てば，安定層の条件を少し弱くした半安定層の $S$-同値類を安定層のモデュライに付け加えることによって，安定層のモデュライのコンパクト化である射影的なスキームを得ることになる。

安定層の有界性は，代数曲線の場合には1950年代に M. F. Atiyah が証明しいる。Atiyah は代数曲線上のベクトル束の分解型という概念を導入し，階数と次数を固定した直和分解しないベクトル束の族が有界であることを示した。しかし，後に A. Grothendieck と S. Kleiman が展開した有界性についての一般論を使えば，代数曲線上の安定層の有界性は殆ど自明である。代数曲面上の安定層の有界性は，この理論を使って，階数2の場合に竹本と D. Mumford が独立に，丸山が一般の場合に証明した。ここでは2番目のコホモロジーの消滅が基礎になり，従って安定層に限らず「型」を固定した捩れのない連接層の族の有界性が成り立つ。

安定層の有界性についての考察は，射影平面上の階数2のベクトル束を一般の直線に制限したときの直和分解の型についての Grauert-Mülich の定理と結びつき，Harder-Narasimhan filtration（HNF）の一般化を導いた。基礎体の標数が0のときは，半安定層の一般超曲面への制限の HNF が一定の制限を受けるという Spindler-丸山の定理から，安定層の，もっと一般に型を固定した族の有界性が導かれる。この場合 HNF の制限が与えられた層の次数のみによることが基礎になっている。しかし，この形の制限定理には，正標数の場合に反例があることから，一般の場合には別の考察が必要になる。

丸山は半安定層の一般超曲面への制限と余次元2の完全交叉への制限の HNF の考察から階数が2，3の場合の有界性を示した。この丸山の結果（1980年）から20年間，多くの代数幾何学者の努力にもかかわらず，この問題の解決について全く進展がなかった。

申請者は半安定層の超曲面への制限の HNF について，第2 Chern 類の寄与を考慮に入れた不等式を，階数についての条件を付けながらも，証明をしている，

(1) $L$ は非特異射影曲面 $S$ 上の非常に豊富な一次系とし，$E$ は $S$ 上の階数2の半安定層とする。$L$ の一般な元 $Y$ について $E|Y$ が半安定でなければ，$E|Y$ の階数1の連接部分層 $F$ について

$$\deg F-\frac{\deg E}{2}$$

は $S$，$L$，$c_1(E)$，$c_2(E)$ によって決まる量で押さえられる。

(2) $L$ は非特異射影曲面 $S$ 上の非常に豊富な一次系とし，$E$ は $S$ 上の階数 3 の半安定層とする。$L$ の一般な元 $Y$ について $E|Y$ が半安定でなければ，

$$\mu\max(E|Y)-\frac{\deg E}{3}$$

は $S$，$L$，$c_1(E)$，$c_2(E)$ によって決まる量で押さえられる。ここで，$\mu\max(E|Y)$ は $E|Y$ の HNF の最初のフィルターの次数を階数で割った量である。

これらの結果を使って，3 次元射影多様体上で階数 4 の半安定層について類似の結果を用意して，可換環 $\Lambda$ 上のネタースキームの射影射 $f: X\to S$ の各ファイバー上の階数 4 の半安定層の族の有界性が証明される。

ここで用いられた方法は，丸山が使ったものに類似しているが，申請者が用意したアイデアは真に独創的なものであり，一般階数の場合の肯定的解決に道を拓くものであると考えられる。

参考論文では $K3$ 曲面上の安定層のモデュライの 2 次元の成分は，それが射影的であれば（安定＝半安定であれば）$K3$ 曲面であるという，向井の美しい定理を一般化したものである。すなわち，$K3$ 曲面上の半安定層のモデュライの 2 次元の成分は，自然な特異点の解消を持ち，特異点を解消した曲面は $K3$ 曲面である，というものである。これも，また向井の結果と同様に極めて見事な結果である。

## 論文審査の結果の要旨

不変量を共有する安定層の集合には普遍性を持ったスキームの構造が入り（安定層のモデュライと呼ばれる）その構造自身が豊かな代数幾何学的対象であるのみならず，基底多様体の研究に強力な道具を提供している。この安定層のモデュライが有限型であるか，従って擬射影的であるがどうかは，安定層のモデュライの構成に関して未解決の最重要課題である。これが安定層の有界性の問題である。安定層の有界性が成り立てば，安定層の条件を少し弱くした半安定層の S - 同値類を安定層のモデュライに付け加えることによって，安定層のモデュライのコンパクト化である射影的なスキームを得ることになる。

申請者は20年間に亘って全く動きのなかったこの問題に画期的とも言える進展をもたらした。主論文の主定理は次のように述べられる。

**定理**　$f: X\to S$ は可換環 $\Lambda$ 上のネタースキームの smooth 射影射とし，$O_X(1)$ は $f$- 豊富な可逆層とする。$\dim X/S=n$ として，$r$，$a_1$，…，$a_n$ を $0<r\leq 4$ となる整数，$\alpha=(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_{r-1})$ を有理数の列とする。$T_{X/S}(n,\ r,\ a_1,\ \cdots,\ a_n;\ \alpha)$ を次の条件を充たす $f$ のファイバー上の連接層 $E$ の類の族とする

(1) $E$ は type $\alpha$ の捩れのない層である。

(2) $E$ の階数は $r$，$a_1(E)=a_1$，$a_i(E)\geq a_i(2\leq i\leq n)$。

さらに，$T'_{X/S}(n,\ r,\ a_1,\ a_2;\ \alpha)$ を上の(1)と下記の条件を充たす $f$ のファイバー上の連接層 $E$ の類の族とする。

(3) $E$ は Serre の条件 $(S_2)$ を充たす。

(4) $E$ の階数は $r$，$a_1(E)=a_1$，$a_2(E)\geq a_2$。

このとき，上記の 2 つの族は共に有界である。

この定理は $r\leq 3$ の場合に丸山によって証明されたが，その方法は $r=4$ には有効でないことが知られている。申請者の証明の基礎になるのは以下の定理である。

**定理**　$X$ は代数的閉体 $k$ 上の 3 次元非特異射影的多様体，$O_X(1)$ は非常に豊富な可逆層，$L$ は非常に豊富な $|O_X(1)|$ の部分一次系とする。$d$ は X の $O_X(1)$ に関する次数とし，$a_1$，$a_2$ を固定して

$$A=\frac{a_1{}^2}{8d}+\frac{a_1}{2}-a_2$$

とおく。また

$$\gamma(X,\ O_X(1))=\left(\frac{1}{24}K_X{}^2-\frac{1}{12}c_2(X)\cdot O_X(1)\right)-\frac{d}{6}$$

と定義する。$E$ は $a_1(E)=a_1$，$a_2(E)\geq a_2$ となる $X$ 上の階数 4 の半安定層とする。$L$ の一般な元 $Y$ について，$E|Y$ が半安

定でないならば，$\mu(E)-\mu\min(E|Y)$ は共に $A$，$d$，$\gamma(X,\ \mathcal{O}_X(1))$，$K_X$，$\mathcal{O}_X(1)^2)$ にのみよる定数 $B(A,\ d,\ \gamma(X,\ \mathcal{O}_X(1)),\ (K_X,\ \mathcal{O}_X(1)^2))$ で上から押さえられる。

この定理の証明には曲面上の半安定層を曲線へ制限したときのHNFについての詳細な研究が基礎になっている。申請者の手法は丸山の方法に類似しているように見えるが，実際には，丸山の方法を遙かに越えて，問題の全面的解決に道を拓くと考えられ，注目すべき独創性を含んでいる。

参考論文の主結果も申請者の数学的能力の高さを示す見事なものである。$K3$ 曲面上の twisted semistable な層のモデュライが2次元になるとき，それは $K3$ 曲面になり，同じ不変量を持つ半安定層のモデュライの特異点の解消になっている，というもので，向井の結果の一般化であり，twisted semistable という概念の有効性を如実に示したものである。

申請者の論文は，20年間に亘って全く進展のなかった重要問題に，全面解決への扉を開いた画期的なものであり，代数幾何学の主要な道具の一つに発展した安定層のモデュライ理論に多大の貢献をしたものである。以上のことから，大学院在学5年未満ではあるが，本申請論文は博士（理学）の学位論文として価値のあるものと認める。