氏　　　名	山木壱彦（やまき かずひこ）
学位(専攻分野)	博　士（理　学）
学 位 記 番 号	理　博　第 2400 号
学位授与の日付	平成 13 年 9 月 25 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当
研究科・専攻	理学研究科数学・数理解析専攻
学位論文題目	A direct proof of Moriwaki's inequality for semistably fibered surfaces and its generalization （森脇不等式の直接証明と一般化）
論文調査委員	（主 査）教 授 丸山正樹　助教授 森脇　淳　教 授 河野　明

論文内容の要旨

$\bar{M}_g$ を種数 g の安定曲線のモジュライ空間とします。$\bar{M}_g$ 上のQ-ピカール群は，ホッジ束と呼ばれるQ-因子 λ と境界類と呼ばれる $1+[g/2]$ 個のQ-因子 δ_0，δ_1，…，$\delta_{[g/2]}$ によって生成されることはよく知られています。これらのQ-因子

$$\lambda,\ \delta_0,\ \delta_1,\ \cdots,\ \delta_{[g/2]}$$

に間にどのような関係が成立するかという問題は古典的でありますが，非常に難しい問題であり，種々の分野の数学と深く結びついています。特に，これらの因子の間に成立する不等式は，$\bar{M}_g$ 上の双有理幾何そのものであり代数幾何の立場から非常に興味深いものであります。

ここで，$\bar{M}_g$ 上の二つのQ-因子 D_1 と D_2 に対して，不等式関係 $D_1 \geq D_2$ があるとは，境界には含まれない $\bar{M}_g$ 上のすべての既約曲線 C に対して $(D_1 \cdot C) \geq (D_2 \cdot C)$ が成り立つことであると約束します。このとき，まず，パーシン・アラケロフによって $\lambda \geq 0$ が発見され，続いて，コーナルバ・ハリス・シャオによって，

$$(8g+4)\lambda \geq g(\delta_0+\delta_1+\cdots\delta_{[g/2]})$$

という不等式が発見され，コーナルバ・ハリス・シャオ不等式と呼ばれています。さらに，森脇により，

$$(8g+4)\lambda \geq g\delta_0+\sum_{i=1}^{[g/2]} 4i(g-i)\delta_i$$

という不等式が発見され，これは森脇不等式と呼ばれています。この不等式は，$\bar{M}_g$ 上ではこれ以上改良が得られないもっとも強い形のものであります。

上のような不等式は，次のような代数曲面の問題に置き換えることができます。X を代数曲面，Y を代数曲線，$f: X \to Y$ を種数 g の代数曲線のファイバー空間とするとき，不等式

$$(8g+4)\deg(f_*(\omega_{X/Y})) \geq g\delta_0(X/Y)+\sum_{i=1}^{[g/2]} 4i(g-i)\delta_i(X/Y)$$

が成り立つ。

森脇は不等式の証明にあたり，代数曲面の問題に還元することをさけ自ら開発した相対ボゴモロフ不等式とある種の正因子のトリックを用いることで，最終的な不等式の証明を得ました。したがって，彼の不等式が発表された当時から代数曲面上での直接証明ができないかというのが重要な課題であると専門家の間では考えられていました。それに対する答えが山木氏の主論文の内容であります。さらに，モジュライ空間上では森脇不等式以上の結果は得られませんが，代数曲面上ではさらなる改良が望めることが指摘されていました。実際，彼の方法により，不等式の精密化が得られています。この種の精密化は幾何学的ボゴモロフ予想を考える上で非常に重要であります。

彼は上のことを実行するために特異ファイバーの組み合わせ論的な複雑さを巧みに整理し，$f^*f_*(\omega_{X/Y}) \to \omega_{X/Y}$ のカーネルに絶妙な基本変換をほどこすことで，X 上の次の性質をみたすベクトル束 E を構成しました。

(1) E の判別式 $2\operatorname{rank}(E)c_2(E)-(\operatorname{rank}(E)-1)c_1(E)^2$ は

$$(8g+4)\deg(f_*(\omega_{X/Y}))-g\delta_0(X/Y)-\sum_{i=1}^{[g/2]} 4i(g-i)\delta_i(X/Y)$$

に等しい。

(2) f が $y \in Y$ 上スムーズであるなら，E は $f^{-1}(y)$ 上で

$$H^0(f^{-1}(y),\ \omega_{f^{-1}(y)}) \otimes O_{f^{-1}(y)} \to \omega_{f^{-1}(y)}$$

のカーネルに同型である。

このベクトル束の構成が主論文の本質的部分で，これから不等式は容易に導きだせます。このようなベクトル束は専門家の間では予想されていましたが，その組み合わせ論的な複雑さゆえ，解決できなかった部分でありました。さらに，副産物として，標数2の場合の不等式の証明という未解決の問題も解決されました。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

山木氏の学位申請のための主論文は安定曲線の族に付随するホッジ束の位数の下限を安定曲線の族の特異ファイバーの情報で記述する業績であります。これに関連する仕事の歴史は古く，初期的な仕事はパーシン・アラケロフにさかのぼります。彼らはそこでホッジ束の位数が非負であることを示し，それの応用として，函数体上の曲線の有理点に関する種々の結果を得ています。さらに，その後の重要な発展はコーナルバ・ハリス・シャオによってもたらされました。彼らは，そこで，特異ファイバーの個数でホッジ束の位数の下限を与える不等式を与え，今日，それはコーナルバ・ハリス・シャオ不等式と呼ばれています。彼らはそれを利用して，安定曲線のモジュライ空間のピカール群のある種の錐を決定しました。彼らの不等式はかなり精密な不等式でありましたが，当時から，もう少し，特異ファイバーの状況を反映した不等式が期待されていました。しかしながら，それ以後，10年間はほとんど何も進展がありませんでした。そのような状況の中，突破口を見つけたのが森脇でありました。彼の不等式は安定曲線のモジュライ空間上ではこれ以上の改良が望めない決定版となり，今日，森脇不等式と呼ばれています。彼は，それを利用して函数体上のボゴモロフ予想をある条件下で証明しました。ただ，彼がその不等式の証明に用いた方法は高度な数学のトリックを用いるもので，なぜ不等式が成立するかを十分説明できるものではありませんでした。そのため，その不等式の直接証明がこの分野での研究者の中心的な課題となりました。そのような状況の中，それに対する答えを出したのが山木氏の主論文における業績であります。森脇の方法は組み合わせ論的な複雑さを数々のトリックを用いて回避したもので，それがかえって不等式の意味を見えにくくしていました。山木氏は，それを真正面からとらえ，正攻法であたることで，種々の不透明な点を明確にし，最終的に不等式の直接証明を与えました。

もう少し具体的には，X を代数曲面，Y を代数曲線，$f: X \to Y$ を種数 g の代数曲線のファイバー空間とするとき，彼は特異ファイバーの組み合わせ論的な複雑さを巧みに整理し，$f^*f_*(\omega_{X/Y}) \to \omega_{X/Y}$ のカーネルに絶妙な基本変換をほどこすことで，X 上の次の性質をみたすベクトル束 E を構成しました。

(1) E の判別式 $2\mathrm{rank}(E)c_2(E) - (\mathrm{rank}(E)-1)c_1(E)^2$ は

$$(8g+4)\deg(f_*(\omega_{X/Y})) - g\delta_0(X/Y) - \sum_{i=1}^{[g/2]} 4i(g-i)\delta_i(X/Y)$$

に等しい。

(2) f が $y \in Y$ 上スムーズであるなら，E は $f^{-1}(y)$ 上で

$$H^0(f^{-1}(y),\ \omega_{f^{-1}(y)}) \otimes O_{f^{-1}(y)} \to \omega_{f^{-1}(y)}$$

のカーネルに同型である。

このベクトル束の構成が主論文の本質的部分で，これから不等式は容易に導きだせます。このようなベクトル束は専門家の間では予想されていたが，その組み合わせ論的な複雑さゆえ，解決できなかった部分で，彼の卓越した数学者としての能力が発揮されている部分であり，内外の研究者に驚きをもって受け入れられました，また，彼は，森脇不等式のみならず，状況によっては，さらに精密な不等式を与えることにも成功しました。それに加え，標数2の場合の不等式の証明という未解決の問題も解決しました。

以上のように申請者山木壱彦氏の申請論文はホッジ束の位数の下限を求めることについての卓越したものであり，国際的にも高い評価を得ており，大学院在学5年未満ではあるが，博士（理学）の学位論文として価値のあるものとして認めます。