

氏名	まつ い ひろ き 松 井 宏 樹
学位(専攻分野)	博 士 (理 学)
学位記番号	理 博 第 2410 号
学位授与の日付	平 成 13 年 11 月 26 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研究科・専攻	理 学 研 究 科 数 学 ・ 数 理 解 析 専 攻
学位論文題目	Finite order automorphisms and dimension groups of Cantor minimal systems (カントール極小系の有限次数自己同型と次元群)
論文調査委員	(主 査) 助 教 授 泉 正 己 教 授 河 野 明 教 授 重 川 一 郎

論 文 内 容 の 要 旨

$Y$ が Cantor 集合,  $\phi: Y \rightarrow Y$ が自己同相写像で全ての  $Y$ の点に対してその軌道が  $Y$ で稠密であるとき, 力学系  $(Y, \phi)$  を Cantor 極小系と呼ぶ。このとき  $(Y, \phi)$  の  $K$  群とその正錐を

$$K^0(Y, \phi) = C(Y, \mathbb{Z}) / \{f - f \circ \phi; f \in C(Y, \mathbb{Z})\},$$

$$K^0(Y, \phi)^+ = \{[f] \in K^0(Y, \phi); f \geq 0\},$$

と定める。ここで  $C(Y, \mathbb{Z})$  は  $Y$ 上の整数値連続関数全体である。定数関数 1 の定める  $K$  群の元を  $[1]$  と書くと, 三つ組み

$$(K^0(Y, \phi), K^0(Y, \phi)^+, [1])$$

は抽象的には順序単位元  $[1]$  をもつ次元群と呼ばれるものになり, これも広義には  $(Y, \phi)$  の  $K$  群と呼ばれる。この三つ組みは, もともと  $(Y, \phi)$  から構成される力学系  $C^*$  環の  $K_0$  群を力学系の言葉で書き下したものであり, Cantor 極小系に限れば力学系  $C^*$  環の同型類の完全不変量であることが, Elliott の分類定理により知られていた。Giordano-Putnam-Skau は1995年の論文で, この不変量が Cantor 極小系の強軌道同値類の完全不変量であることを証明し,  $K$  群による Cantor 極小系の研究を創始した。

$C(\phi)$  を  $Y$ の自己同相写像  $\phi$  と交換するもの全体とすると,  $C(\phi)$  の元  $\gamma$  は自然に  $K^0(Y, \phi)$  の自己同型を誘導するので, それを  $\text{mod}(\gamma)$  と書く。  $T(\phi)$  を  $C(\phi)$  の元で  $K^0(Y, \phi)$  に自明に作用するもの全体とする。申請者の論文の目的は,  $C(\phi)$  や  $T(\phi)$  の有限部分群の構造を  $K$  群を使って解析することである。

$G$  が  $C(\phi)$  の有限部分群の時,  $X$  を  $Y$  の  $G$  の作用による商空間,  $\phi$  を  $\phi$  が  $X$  に誘導する自己同相写像とすると,  $(X, \phi)$  も Cantor 極小系となる。このとき  $X$  上の  $G$  に値を取るコサイクル  $c$  が存在して,  $(Y, \phi)$  は  $(X, \phi)$  の  $c$  による斜積拡大となる。つまり  $(Y, \phi)$  は次の変換と同型になる。

$$X \times G \ni (x, g) \rightarrow (\phi(x), gc(x))$$

さらに  $G$  の作用は上の第二成分への左からの自然な作用と同一視される。斜積拡大の  $K$  群の計算方法を考案することにより, 申請者は次の結果を得た。

定理 (主論文 Theorem 3.3, 3.5)  $(Y, \phi)$  を Cantor 極小系とする。このとき次が成立する。

- (i) 任意の  $T(\phi)$  の有限部分群は巡回群である。
- (ii)  $G$  を  $C(\phi)$  の有限部分群で  $G \cap T(\phi)$  が素数位数  $p$  の巡回部分群を含むならば,  $G$  の  $p$ -シロー部分群は巡回群である。

上の定理より, 特に  $C(\phi)$  や  $T(\phi)$  の有限巡回部分群の構造の解析が重要になるが, それに対して申請者は次の定理を得た。

定理 (主論文 Lemma 3.6)  $(Y, \phi)$  を Cantor 極小系とし,  $\gamma$  を  $C(\phi)$  の位数  $m \neq 0$  の元とする。このとき次が成立する。

$$\begin{aligned} \text{Ker}(id - \text{mod}(\gamma)) / \text{Im}\left(\sum_{i=0}^{m-1} \text{mod}(\gamma)^i\right) &\cong Z/mZ, \\ \text{Im}\left(\sum_{i=0}^{m-1} \text{mod}(\gamma)^i\right) &= \text{Im}(id - \gamma) \end{aligned}$$

特に  $\gamma \in T(\phi)$  のときは上の命題は  $K^0(Y, \phi) / mK^0(Y, \phi) \cong Z/mZ$  となるが、より強く次が成立する。

定理 (主論文 Theorem 3.7)  $m$  を自然数,  $(D, D^+, u)$  を  $Z$  と同型でない単純次元群とする。このとき次の二つの条件は同値である。

- (i)  $D/mD \cong Z/mZ$  かつ  $u \in mD$ 。
- (ii)  $K$  群が  $(D, D^+, u)$  と順序同型である Cantor 極小系  $(Y, \phi)$  で  $T(\phi)$  が  $Z/mZ$  を含むものが存在する。

申請者は参考論文 1 において,  $T(\phi)$  の元の不変量として  $T(\phi)$  から  $\text{Ext}(K^0(Y, \phi), Z)$  への準同型  $\eta$  を定義した。上記の定理より  $\eta$  の詳細な記述が可能となり, 次の系が得られる。

系 (主論文 Corollary 3.9)  $(Y, \phi)$  が Cantor 極小系であり,  $\gamma \neq id$  が  $T(\phi)$  の有限位数の元とする。このとき  $\eta(\gamma) = 0$  であることと  $\text{Hom}(K^0(Y, \phi), Z) \neq \{0\}$  となることは同値である。特にこのとき  $\text{Hom}(K^0(Y, \phi), Z) \cong Z$  となる。

### 論文審査の結果の要旨

Cantor 極小系  $(Y, \phi)$  の研究は, 1990年代に入って発展した  $C^*$  環の分類理論から派生して, Giordano-Putnum-Skau により始められた新しい研究分野である。その最大の特徴は,  $K$  群という新しい不変量による軌道構造の解析にあり, 研究方法としてはホモロジー代数や順序付 Bratteli 図形の組み合わせ論が駆使される。

$(Y, \phi)$  の自己同型群  $C(\phi)$  に関しては, Giordano-Putnum-Skau の若干の結果があったものの, その本格的な研究は申請者の参考論文 1 により始められたと言ってよい。 $C(\phi)$  の研究の動機には, Cantor 極小系の拡大や商写像の構造の解析, それらから構成される力学系  $C^*$  環の包含関係やその Galois 群の研究などがある。 $C(\phi)$  は自然に  $K$  群  $K^0(Y, \phi)$  に作用しているので, その作用が自明な元全体からなる部分群  $T(\phi)$  の研究が本質的となる。参考論文 1 では,  $C^*$  環の Kasparov  $KK$  理論を使って  $T(\phi)$  から  $\text{Ext}(K^0(Y, \phi), Z)$  への準同型写像  $\eta$  が構成され, その力学系的記述と具体例での計算が行われている。本申請論文では, 参考論文 1 でその重要性が認識された斜積拡大を系統的に解析することにより,  $C(\phi)$  や  $T(\phi)$  に関する多くの興味深い結果が得られている。

$(X, \phi)$  が Cantor 極小系とし,  $c$  を  $Y$  上の有限群  $G$  に値をとるコサイクルとする。 $(Y, \phi)$  を  $(X, \phi)$  のコサイクル  $c$  による斜積拡大とすると, 次の問題が考えられる。

- (1) いつ  $(Y, \phi)$  が極小系になるか。
- (2)  $(Y, \phi)$  が極小系になるときその  $K$  群をいかに記述するか。

本申請論文の Lemma 2.3, Theorem 2.5 では, この二つの問題に対する完全な答えが与えられており, これらの結果は今後の斜積拡大の研究の基礎となるものであり大変重要である。特に Theorem 2.5 では  $(X, \phi)$  の Bratteli 図形と  $c$  の情報から  $(Y, \phi)$  の Bratteli 図形を得るアルゴリズムが与えられており, これは申請者の計算例からわかるように, 具体例の  $K$  群の計算の道具としても強力である。

$T(\phi)$  の有限部分群は巡回群に限ることを示した申請論文の Theorem 3.3 は,  $C(\phi)$  には任意の有限群が入り得るという既知の事実と対比すると, 全く誰も予想しなかった結果であり, 専門家の間に驚きを与えた。この結果は本申請論文の Theorem 3.5 Lemma 3.6 と合わせて,  $C(\phi)$  と  $T(\phi)$  の有限部分群が非常に強い制約を持つことを示している。申請者の研究以前には,  $C(\phi)$  や  $T(\phi)$  の性質についてはほとんど何も知られておらず, これらの結果の持つ意義は大きい。申請者の結果はこの分野の今後の研究に大きな影響を与えるものと思われる。さらに本申請論文の Theorem 3.7 では,  $T(\phi)$  が位数  $m$  の巡回群を含む Cantor 極小系の  $K$  群となり得る順序単位元をもつ次元群の, 完全な特徴付けが与えられており, 一連の結果を完結させている。また参考論文 1 で導入された不変量  $\eta$  の詳細な記述も Lemma 3.8, Corollary 3.9 で与えられている。これらはすべて Theorem 2.5 の応用であり, この定理がいかにこの分野で基本的な役割を果たすかを示している。

上記の Lemma 3.8 は  $C^*$  環の観点からも興味深い結果である。この命題は,  $(Y, \phi)$  の力学系  $C^*$  環上への  $C(\phi)$  の有限位数の元から構成される巡回群の作用が, Rohlin の性質に近い性質を持っていること示し, このような作用の  $K$  群によ

る分類可能性を示唆している。

本申請論文では多くの興味深い実例の計算も行われている。本論文や参考論文を見ても分かるように、申請者の組み合わせ論的議論により実例を構成する能力は他に類を見ず、申請者の数学的能力の高さを物語っている。

申請者の一連の結果は新しい分野の研究に先鞭をつけるものであり、得られた結果が重要であるのみならず、新しい研究方法を確立したという意味でも意義深いものである。以上のことから、大学院在学5年未満ではあるが、本申請論文は博士(理学)の学位論文として価値のあるものと認める。