氏　　　名	市　野　篤　史（いちの　あつし）
学位(専攻分野)	博　士（理　学）
学位記番号	理　博　第2414号
学位授与の日付	平成14年1月23日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
研究科・専攻	理学研究科数学・数理解析専攻
学位論文題目	On the local theta correspondence and R-groups （局所テータ対応とR群について）
論文調査委員	（主査）助教授 池田　保　　教授 吉田敬之　　助教授 森脇　淳

論文内容の要旨

On the local theta correspondence and R-group

（局所テータ対応とR群について）

市野氏はこの論文でunitary群のテータ対応について考察している。

以下では$G=G'=U(n;\ n)$をp進体上のunitary群とする。π(resp. π')をG(resp. G)の既約許容表現として，

$$\mathrm{Hom}_{G\times G'}(\omega\otimes\pi,\ \pi')\neq 0$$

が成り立つとき，$\pi'=\theta(\pi)$と表す。但しωは$G\times G'$のWeil表現である。$p\neq 2$の時，与えられたπに対して，$\theta(\pi)$は存在すれば一意的に定まることがWaldspurgerによって証明されている。しかし，πと$\theta(\pi)$の間の関係を具体的に記述することは，一般には未だに難しい状況にある。市野氏はこの論文において，ある種の緩増加表現πに対して，$\theta(\pi)$を精密に記述している。

この場合，ϕ(resp. $\theta(\phi)$)をπ(resp. $\theta(\pi)$)のLanglandsパラメタとすると，$\phi=\theta(\phi)$となる。特に，Π_ϕ(resp. $\Pi_{\theta(\phi)}$)をϕ(resp. $\theta(\phi)$)により定まるL-packetとすると，$\Pi_\phi=\Pi_{\theta(\phi)}$である。一方，テータ対応により$\Pi_\phi$と$\Pi_{\theta(\phi)}$の間に全単射が引き起こされるが，これは恒等写像ではなく，その捻じれ具合はε-因子を用いて表される。Fをp進体，(ただし$p\neq 2$)EをFの二次拡大とする。また$\delta\in E^\times$で$\mathrm{tr}_{E/F}(\delta)=0$を満たすものを固定する。$G$(resp. G')をHermite行列(resp. 歪Hermite行列)

$$\begin{pmatrix} 0 & \delta 1_n \\ -\delta 1_n & 0 \end{pmatrix}\left(\text{resp.}\ \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}\right)$$

に関するunitary群として実現する。(実際は$G=G'$となる）さて，Fの非自明な指標ψ_Fを固定すると，$G\times G'$のWeil表現ωが定義される。ここで，ωはδにも依存することに注意する。以下，πは緩増加と仮定する。この時，Gの放物型部分群PとPのLevi成分Lの離散系列表現σで，πが誘導表現$I(\sigma)=\mathrm{Ind}_P{}^G(\sigma)$の既約成分として実現されるものが存在する。以下，$L\simeq \mathrm{GL}_{n_1}(E)\times\cdots\times\mathrm{GL}_{n_r}(E)$と仮定する。但し$n_1+\cdots+n_r=n$である。この場合$\theta(\pi)$は$I'(\sigma)=\mathrm{Ind}_{P'}{}^{G'}(\sigma)$の既約成分となる。但し$P'=P$は$G'$の放物型部分群とみなす。このことは，$\sigma$がsupercuspidalならばKudlaによって知られていたが，既約成分の対応を精密に与えるまでには至らなかった。一方，$I(\sigma)$の既約分解はHarish-Chandra, Knapp-Stein, SilbergerによるR群を用いて記述することができる。今の場合，R群はGoldbergによって計算されている。WをLの中心の極大分裂torusに関するGのWeyl群とする。すなわち，$W\simeq(Z/2Z)^r\times\mathfrak{S}_r$である。また$r_i\in W$によって$Z/2Z$の$i$番目の成分に関する符号の入れ替えを表す。$T$を$\{1,\ \cdots,\ r\}$の部分集合で，次を満たす$i$全体からなるものとする。

- $\sigma_i\simeq {}^t\bar{\sigma}_i^{-1}$
- $j>i$ならば$\sigma_j\not\simeq\sigma_i$
- σ_iのAsai L関数$L^t_{\mathrm{Asai}}(s,\ \sigma_i)$は$s=0$で正則

さて，R を r_i，$i \in T$ により生成される W の部分群とする。すなわち，$R \simeq (Z/2Z)^{|T|}$ である。この時，R の指標群を $\widehat{R}$ とすると，$I(\sigma)$ の既約分解は

$$I(\sigma) = \bigoplus_{\kappa \in \widehat{R}} \pi_\kappa$$

の形で与えられる。但し π_κ は κ に対応する G の既約緩増加表現だが，κ と π_κ の間の対応は標準的には定まらないことに注意する。同様に，$I'(\sigma)$ の既約分解は

$$I'(\sigma) = \bigoplus_{\kappa \in \widehat{R}} \pi'_\kappa$$

の形で与えられる。但し π_κ' を $G = G'$ の表現とみなしたとき，$\pi_\kappa = \pi_\kappa'$ とする。この時，この論文の主定理は以下の通りである。

定理　$i \in T$ に対して

$$\theta(\kappa)(r_i) = \kappa(r_i)\varepsilon(1/2,\ \sigma_i,\ \psi_F \circ \mathrm{tr}_{E/F})\mu_i(\delta)^{-1}$$

により $\theta(\kappa) \in \widehat{R}$ が定まり，

$$\theta(\pi_\kappa) = \pi'_{\theta(\kappa)}$$

である。但し μ_i は σ_i の central character である。

論文審査の結果の要旨

市野氏はこの論文において局所体上の unitary 群の許容表現めテータ対応を考察している。

テータ対応とは，大局的にはテータ関数を核関数として得られる，二つの代数群上の保型表現の間の対応である。このような対応は古くから研究されており，たとえば一変数の重さ整数の保型形式と，重さ半整数の保型形式の間の志村対応などもテータ対応を使って実現することができる。

テータ対応を局所的に考えれば，Weil 表現を仲立ちとして得られる，代数群の許容表現の間の対応が自然な考察の対象となる。市野氏が研究主題としたテータ対応とは，このような局所体上の代数群の許容表現のテータ対応のことである。

一般に，剰余標数が 2 でない非 archimedes 的局所体上のテータ対応に関しては Waldspurger により，許容表現のテータ対応は存在すれば一意的であることが知られているが，その対応が具体的にどのようなものであるかは，ほとんど知られていなかった。

市野氏の主定理の内容は unitary 群のある種の緩増加許容表現のテータ対応を具体的に書き下すと言うものである。

市野氏が考察の対象とした緩増加許容表現とは unitary 群の Levi 部分群で一般線型群の直積になっているようなものの二乗可積分表現からの誘導表現であり，緩増加許容表現の中ではかなり広いクラスの表現である。このような緩増加表現は Harish-Chandra, Knapp-Stein, Silberger などによって研究されており，その既約分解は R-群によって記述される。この場合には R-群は（2,2，…，2）型の Abel 群になることが Goldberg によって示されている。

市野氏の主定理のではこの R-群の具体的な対応が記述されている。ここには緩増加許容表現の ε-因子が表れる。このような ε-因子は既に一変数の保型形式の志村対応を記述する時にも表れており，その自然な拡張としても興味深いものである。

また，unitary 群のテータ対応に関連して Prasad が種々の予想を述べているが，市野氏の結果はこの予想の部分的解決になっており，この意味でも興味深いものである。

定理を証明するために市野氏はまず，テータ対応を与える核関数を具体的に構成した。定理の証明には，この核関数が自明でないこと，そしてこの核関数が，双対的に定義されるもう一つの核関数とある種の ε-因子を除いて一致することを示す必要がある。前者は表現論の標準的な方法で示すことができるのであるが，後者の証明にはかなり困難な計算を要する。この計算を市野氏は Fourier 変換を複雑に組み合わせる独創的な方法によって解決した。この方法は形を変えれば他の古典群にも適用できる可能性のあるものであり，今後の研究の発展が見込まれるものであると思われる。

以上のように，この種の結果を得るためには許容表現の理論，特にテータ対応，Langlands の分類定理，R-群などの深い理解，および粘り強い計算力が必要である。従って，市野氏が保型表現の理論の研究者としての資質を備えていることを

十分に示しているものと言える。

市野氏は大学院在学5年未満ではあるが，特例として博士（学位）を援与するに十分な研究成果をあげていると認められる。

以上のことから，この論文は国際的な評価を得る価値のあるものであり，学位を授与するにふさわしいものであると思われる。