氏　　　名	眞(ま)野(の)智(とし)行(ゆき)
学位(専攻分野)	博　士（理　学）
学位記番号	理　博　第 2415 号
学位授与の日付	平成 14 年 1 月 23 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当
研究科・専攻	理学研究科数学・数理解析専攻
学位論文題目	Differential equuations for Hilbert modular forms of Q（$\sqrt{2}$） （Q($\sqrt{2}$)のヒルベルト・モジュラー形式がみたす微分方程式）
論文調査委員	（主　査） 教 授 上野健爾　　教 授 吉田敬之　　教 授 丸山正樹

論文内容の要旨

保型形式が微分方程式で特徴づけることができることは19世紀の Jacobi 以来多くの数学者の関心をひいてきた。この方面で本質的な進展をもたらしたのは19世紀後半の Halphen である。彼はテータ零値は 3 個の 1 変数未知関数の微分がこれらの未知関数のある種の 2 次式と等しくなるという非線形微分方程式で特徴づけられることを見出した。最近になって Halphen の結果は大山陽介によって詳しく分析されその本質が明らかにされた。しかし，具体的に群 Γ が与えられたとき，Γ に関する保型形式を特徴づける非線形微分方程式系を具体的に求めることはきわめて困難な問題である。大山陽介は $SL(2, Z)$ の合同部分群 $\Gamma(2)$，$\Gamma(3)$ に対してこの問題を解決したが，申請者は参考論文の中で $\Gamma(4)$，$\Gamma(5)$ の場合にこの問題を解決している。

多変数の保型形式に対して同様の問題を考えることは佐藤幹雄によって提唱され，部分的な結果が得られていた。大山陽介は次数 2 のジーゲルモジュラー群 $Sp(4, Z)$ の場合にテータ函数の加法公式をもとにこの問題を解決している。

本申請論文はヒルベルトモジュラー形式の場合に同様の問題を考察し解決したものである。ヒルベルトモジュラー形式の場合はテータ函数の理論を直接用いることは困難であり新たな工夫が必要となり，かつ計算自体も大変複雑になる。

実 2 次体 $K=\mathrm{Q}(\sqrt{2})$ の整数環 O に対してヒルベルト・モジュラー群 $SL(2, O)$ のイデアル(2)に関する主合同部分群

$$\Gamma(2)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in SL(2, O) \mid a\equiv d\equiv 1,\ b\equiv c\equiv 0 \bmod (2)\right\}$$

と行列

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0^{-1} \end{pmatrix},\ \varepsilon_0=1+\sqrt{2}$$

で生成される $SL(2, O)$ の部分群を Γ と記す。群 Γ に関するヒルベルト・モジュラー形式のなす環は

$$\mathrm{C}[x_1, x_2, x_3, x_4, c]/(x_1+x_2+x_3+x_4,\ c^2-C)$$

で与えられる。ここで

$$C=x_1x_2x_3x_4(x_1x_2+x_3x_4)(x_1x_3+x_2x_4)(x_1x_4+x_2x_3)$$

である。

さらに

$$y_1=\frac{1}{2}(x_4-x_3),\ y_2=\frac{1}{2}(x_2-x_1),\ y_3=\frac{1}{2}(x_4+x_3),\ x=\frac{y_1}{y_3},\ y=\frac{y_2}{y_3}$$

とおき，$i=1, 2$ として次の関数を導入する。

$$A_i(z_1, z_2)=\frac{\partial}{\partial z_i}\log y_1(z_1, z_2),$$

$$X_i(z_1,\ z_2)=\frac{\partial}{\partial z_i}\log(x-1),\quad Y_i(z_1,\ z_2)=\frac{\partial}{\partial z_i}\log(x+1),$$

$$Z_i(z_1,\ z_2)=\frac{\partial}{\partial z_i}\log(y-1),\quad W_i(z_1,\ z_2)=\frac{\partial}{\partial z_i}\log(y+1)$$

このときこれらの関数の間には関係式

$$X_1Y_2-X_2Y_1=0,\quad Z_1W_2-Z_2W_1=0$$

という関係がある。さらにこれらの関数の z_1，z_2 に関する偏微分はこれらの関数の簡単な有理式として表現でき，これらの関数が非線形偏微分方程式系を満足することが申請論文で証明されている。さらにこうして作られた非線形偏微分方程式系の解は10個のパラメータを持ち，群 Γ に関するヒルベルト・モジュラー形式はその中の６個のパラメータで特徴づけられることが申請論文で示された。これは１変数の保型形式の場合にはなかった新しい現象であり今後の研究の一方向を示すものとして注目される。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

保型形式を非線形微分方程式を使って特徴づけようとする試みは19世紀に遡る。テータ函数を使って楕円関数論を建設したJacobiは1848年にテータ零値が満たす微分方程式を見出した。この研究は1888年Halphenが違った角度から見直し，テータ函数の零値の対数を取ることによってJacobiの微分方程式を次の形に書き直した。

$$\frac{dX_1}{dt}=X_1X_2+X_1X_3-X_2X_3$$

$$\frac{dX_2}{dt}=X_1X_2+X_2X_3-X_1X_3$$

$$\frac{dX_3}{dt}=X_1X_3+X_2X_3-X_1X_2$$

それのみならず，テータ零値が実質的にこの微分方程式のよって特徴づけられることを示した。この成果は長い間忘れ去られていたが大山陽介は1996年にHalphenの手法を解析して，Fuchs型の微分方程式から，この微分方程式の解の比を特徴付ける非線形微分方程式系を得る一般的方法を見出した。大山はこの手法を具体的な場合に適用し，$SL(2,\ \mathrm{Z})$の合同部分群 $\Gamma(2)$ と $\Gamma(3)$ の保型形式に対して，これらの保型形式を特徴づける非線形微分方程式系の具体形を見出した。一般論と違って具体的な非線形微分方程式系を見出すことはきわめて困難である。

申請者は参考論文で，$SL(2,\ \mathrm{Z})$ の合同部分群 $\Gamma(4)$ と $\Gamma(5)$ の保型形式に対して同様の非線形微分方程式の具体形を見出している。特に $\Gamma(5)$ の場合は多面体群の不変式と関係しており，得られた結果は大変興味深いものがある。

以上の１変数の結果に対してこれを多変数の場合に拡張する試みが佐藤幹雄の問題提起と研究を経て大山陽介によって２次のジーゲルモジュラー群 $Sp(4,\ \mathrm{Z})$ の場合に得られていた。申請者は本申請論文において $\mathrm{Q}(\sqrt{2})$ に付随するヒルベルトモジュラー形式に対して同様の考察を行った。すなわち実２次体 $\mathrm{Q}(\sqrt{2})$ の整数環 O に対してヒルベルト・モジュラー群 $SL(2,\ O)$ のイデアル(2)に関する主合同部分群

$$\Gamma(2)=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL(2,\ O)\,\middle|\,a\equiv d\equiv 1,\ b\equiv c\equiv 0 \bmod (2)\right\}$$

と行列

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_0 & 0\\ 0 & \varepsilon_0{}^{-1}\end{pmatrix},\quad \varepsilon_0=1+\sqrt{2}$$

で生成される $SL(2,\ O)$の部分群を Γ と記すとき，Γ に関するヒルベルトモジュラー形式を特徴づける非線形微分方程式系が申請論文で得られている。従来の理論と違う所はこの微分方程式系の解は10個のパラメータを持ち，その中でヒルベルトモジュラー形式を特徴づけるパラメータは６個であることである。これがヒルベルトモジュラー形式がジーゲルモジ立ラー形式と微分方程式の観点から異なる振る舞いをするのか，考察している群の特殊性によるのかは今後の考察を必要とする結

果であるが，新しい現象として注目すべきことである。その一方では従来の非線形微分方程式系と類似の方程式系が得られていることは非線形微分方程式系の観点から保型形式の研究をさらに押し進めることが可能であることを示している点でも注目すべきことである。

このように，申請者のヒルベルトモジュラー形式を特徴づける非線形微分方程式系に関する業績はこの分野の研究の従来の知見を改め新しい研究方向を示唆する顕著な業績であり，大学院在学５年未満ではあるが，特例として博士（理学）の学位を授与するに十分と考えられる。

よって，本申請論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。

平成13年11月９日，主論文および参考論文に報告されている研究業績を中心として，これに関連した研究分野について口頭試問した結果，合格と認めた。