氏　　　名　梁　永　美（ヤン　ヨン　ミ）
学位(専攻分野)　博　士（理　学）
学位記番号　理　博　第 2276 号
学位授与の日付　平 成 13 年 3 月 23 日
学位授与の要件　学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研究科・専攻　理 学 研 究 科 数 学 ・ 数 理 解 析 専 攻
学位論文題目　On a stable Splitting of Stiefel Manifolds
（Stiefel 多様体の安定分解について）

論文調査委員　（主　査）教 授 西 田 吾 郎　教 授 河 野　明　教 授 吉 田 敬 之

論　文　内　容　の　要　旨

Yang Yeong-Mee 氏の主論文の内容は次の通りである。

n 次ユニタリー群 $U(n)$ の部分空間 $R^k(\mathrm{C}^n)$ を，固有値 1 の固有ベクトル空間の次元が $n-k$ 以上であるユニタリー行列達のなす空間として定義する。これらの部分空間は $U(n)$ の filtration を与えるが，H. Miller は次の安定ホモトピー同値が存在することを示した。

$$U(n)\simeq \bigvee_{1\le k\le n} R^k(\mathrm{C}^n)/R^{k-1}(\mathrm{C}^n)$$

また，同様の安定分解が Stiefel 多様体 $U(n;m)=U(n+m)/U(m)$ に対しても存在する。

一方，K-理論における Adams 作用素 ψ^q は，$(q, n!)=1$ のときは非安定な写像 $BU(n)\to BU(n)$ で実現されることが知られている。この非安定 Adams 作用素のループを取れば $U(n)$ の自己写像 $\Omega\psi^q: U(n)\to U(n)$ が得られる。$U(n)$ のコホモロジー環は普遍転入的な生成元 y_i 達の外積代数 $E(y_1, \cdots, y_n)$ であり，Chern 類に対する Adams 作用素から，$(\Omega\psi)^*(x_i)=q^ix_i$ である。p を素数，q を p-進単元に取る。このとき，作用素 $\Omega\psi^q$ の固有空間分解が加群の場合と同様に行え，$p-1$ 個の空間 X_i と，p-局所ホモトピー同値

$$U(n)\simeq_p X_1\times\cdots\times X_{p-1}$$

が構成される。Stiefel 多様体の場合は，非安定のままでは積構造がないが，安定ホモトピー圏では同様のことが行え，p-局所安定ホモトピー同値の意味で同様の分解が得られる。

Yang 氏はユニタリー群や Stiefel 多様体におけるこれらの相異なる 2 種類の分解が両立可能か，つまり，それらの分解の完全な細分を与えるかどうかを問題とした。一般に空間 X の安定ホモトピー同値の意味での分解を与えることは，X の自己安定写像のホモトピー類のなす環のベキ等元を与えることと同値である。また，2 つの分解が両立するかどうかは対応するベキ等元が交換可能であることである。ユニタリー群のホモロジーは上に述べたコホモロジーの生成元 y_i 達の双対である標準的生成元 x_i 達の外積代数 $E(x_1, \cdots\cdots, x_n)$ であることは良く知られている。Yang 氏はまず，Miller の安定分解が，$U(n)$ の積と両立することを示し，それを用いて，Miller の安定分解に対応するベキ等元が，ホモロジーでは x_i 達の単項式基底について対角行列で表示されることを示した。一方，Adams 作用素を用いた分解も同じ基底に関し，対角型であることは比較的容易に示される。従ってこれらのベキ等元はホモロジーの自己準同型としては交換可能である。

Yang 氏はこれらの結果から，参考論文においては，ユニタリー群について 2 つの分解が完全に細分可能であることをしめし，学位論文においては Stiefel 多様体の場合に拡張した。学位論文における主定理は次の通りである。

定理　$1\le t\le p-1$, $1\le k\le n$ に対し，$x_{i_1}\cdots x_{i_k}$, $i_1+\cdots+i_k\equiv t \bmod p$ 達で生成される $H_*(U(n;m):\mathrm{Z}/p)\cong \mathrm{Z}/p\{x_{i_1}\cdots x_{i_k}: m<i_1<\cdots<i_k\}$ の部分加群を $M_{t,k}$ とおく。このとき，有限スペクトラム $Y_{t,k}$ と p-局所ホモトピー同値写像 $U(n;m)\to \vee Y_{t,k}$ であって，直和分解 $H_*(U(n;m):\mathrm{Z}/p)\cong\oplus M_{t,k}$ を実現するものが存在する。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

Yang Yeong-Mee 氏の主論文における研究の動機および背景は次の通りである。

ユニタリー群 $U(n)$ あるいは Stiefel 多様体のホモトピー群や関連するホモトピー的性質の研究は，古典的な球面上のベクトル場の問題をはじめとする幾何学的な問題と関連して重要な課題となっている。ユニタリー行列は良く知られているように，適当な超平面に関する広義の reflection 達の合成で表される。従ってユニタリー群 $U(n)$ はこのような reflection の合成の回数による階層付けを持つ。階層が 1 の部分空間は，超平面に直交するベクトルとその固有値で定まる行列達であり，射影空間の懸垂と同一視される。古典的な結果としては，この部分空間が安定ホモトピー型の意味で $U(n)$ のレトラクトであることが James により知られており，また，同様のことが $U(n)$ の分類空間 $BU(n)$ についても成立する。この結果はユニタリー群や Stiefel 多様体の幾何学や，ベクトル束に関する Adams 予想の証明に中心的な役割をはたしてきた。

Miller の安定分解 $U(n)\simeq\vee R^k(\mathrm{C}^n)/R^{k-1}(\mathrm{C}^n)$ は James の結果を一般の階層に拡張したものであり，階層がちょうど k の空間 $R^k(\mathrm{C}^n)/R^{k-1}(\mathrm{C}^n)$ の位相を調べることは $U(n)$ のより高次のホモトピー論的性質の解明に必須のものと考えられている。一方，ユニタリー群 $U(n)$ は Adams 作用素を用いることにより，p- 局所的には $p-1$ 個の適当な空間の積に分解することが三村，西田，戸田により知られている。このとき，自然な問題として Miller 分解の各成分 $R^k(\mathrm{C}^n)/R^{k-1}(\mathrm{C}^n)$ が Adams 作用素による更なる分解を持つかどうかが考えられる。Yang Yeong-Mee 氏はこの問題に取り組み，参考論文においてはユニタリー群の場合を，また，主論文においては Stiefel 多様体の場合にいずれも肯定的な解決を与えた。

Yang 氏の方法の独創的な点は次の通りである。一般に空間 X の p- 局所安定分解を与えることと，X の自己安定写像のホモトピー類のなす環のベキ等元 e を与えることは同値である。しかし Yang 氏はベキ等元 e を見つけるには，ホモロジーの自己準同型 e_* がベキ等となるものを見つければ良いこと，さらに，可換なベキ等元を見つけるには e_*，f_* が可換であればよいことを示した。一般に自己安定写像がベキ等かどうかを直接知ることは困難であり，Yang 氏のこの判定条件は応用範囲の広いものと思われる。Yang 氏はこの原理に従い，Miller 分解に対応するベキ等元のホモロジー群での作用を完全に決定し，Adams 作用素のホモロジー群での作用との交換可能性を検証することにより，主定理を証明した。また，この証明において，Miller 分解を与える安定写像の大変簡明かつ幾何学的な構成を与えており，この構成自身興味深いものである。Yang 氏の分解に現われる空間あるいはスペクトラムはこれまで知られていなかったものであり，それらのホモトピー論的研究はユニタリー群や分類空間の研究に大いに寄与するものと期待される。

よって本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認め，合格と判定した。