

氏名	おく やま ゆう すけ 奥 山 裕 介
学位(専攻分野)	博 士 (理 学)
学位記番号	理 博 第 2373 号
学位授与の日付	平 成 13 年 3 月 23 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研究科・専攻	理 学 研 究 科 数 学 ・ 数 理 解 析 専 攻
学位論文題目	Non-linearizability of $n$ -subhyperbolic polynomials at irrationally indifferent fixed points (無理的中立固定点に於ける $n$ -劣双曲多項式の線型化不可能性)
論文調査委員	(主 査) 教 授 上 野 健 爾 教 授 井 川 満 助 教 授 谷 口 雅 彦

### 論 文 内 容 の 要 旨

学位申請者奥山裕介の主論文では、従来の劣双曲多項式概念を拡張した  $n$ -劣双曲かつ区分的1-劣双曲な多項式が、固有値  $\lambda = e^{2\pi i \alpha}$  を持つ無理的中立周期点で線型化可能であるならば、 $\alpha$  はブリュノー条件を満たすことを示すことに成功した。

ここで、正則関数芽の解析的線型化可能性問題は一世紀以上にわたり研究が進められてきたにもかかわらず、無理的中立周期点の場合が最後まで未解決で残されており複素力学系研究における中心的問題のひとつである。2次多項式の無理的中立固定点の場合にはヨコツが完全に解決し、そのような研究成果により1994年にフィールズ賞を得ているが、申請者は参考論文 Non-Linearizability of Polynomials at Irrationally Indifferent Fixed Points において、一般次数の多項式の無理的中立固定点における解析的線型化可能性とそれらのなす正則族の複素解析的性質とを結びつけ、1998年フィールズ賞受賞者のマクマレンらによる力学系的タイヒミュラー理論に基づく解析という全く新しい方法論を開発することにより、3次多項式の無理的中立固定点の線型化可能性を付随するタイヒミュラー空間の非退化性で特徴付けるという成果を得ている。また、参考論文 The Norm Estimates of Pre-Schwarzian Derivatives of Spiral-like Functions では、力学系的タイヒミュラー空間より緩やかな構造を持つアフィン構造表現空間において、一般の共形力学系の放物的分岐から派生するアフィン構造の計量的最良評価式を得ている。

学位申請主論文では、これらの議論をさらに深化させ、まずヨコツの成功した2次多項式に特有の性質として、古典的な劣双曲性の概念を拡張する  $n$ -劣双曲性、およびその部分集合としての、区分的1-劣双曲性という概念を導入した。この概念の導入は申請者の、この分野への深い造詣と秀逸な独創性により初めて可能になったものである。この新しい枠組みの下で、ヨコツやベレッツ・マルコらの幾何学的局所変形理論と、マクマレンやサリヴァンらの解析的大域変形理論とを融合させることにより、主定理の証明に成功している。

すなわち具体的には、与えられた多項式を、区分的1-劣双曲性や解析的線型化可能な無理的中立周期点の存在を保存したまま、力学系的タイヒミュラー構造より緩やかな構造を持つアフィン構造表現空間において摂動させることにより、力学系的タイヒミュラー理論において一般的、すなわちそのタイヒミュラー次元が最大値を取るような、多項式の存在を示し、次に存在の示された一般的な多項式のタイヒミュラー空間の表現に注目することにより証明を完成させている。

また主定理の直接の帰結として、特に1-劣双曲多項式が固有値  $\lambda$  をもつ無理的中立周期点で解析的線型化可能であるなら、 $\alpha$  はブリュノー条件を満たすことが示されているが、定義より無理的中立周期点を持つ2次多項式は1-劣双曲であるから、申請者の結果は2次多項式の場合に限っても、ヨコツには解決できなかった固定点ではない無理的中立周期点の場合にも解析的線型化問題を解決していることが分かる。すなわち、申請者は2次多項式の場合に、初めて解析的線型化問題を完全に解決したと言ってよい。さらに応用として、ブリュノー数の集合の正整数の積作用に対しての不変性という結果が、主定理の帰結として導かれている。

## 論文審査の結果の要旨

学位申請者奥山裕介は、射影構造やアフィン構造などの複素解析的構造の表現空間やさらに上位の構造としてのタイヒミュラー空間の幾何学的性質の解析と、その具体的応用例としての複素力学系における安定性と分岐現象の数学的解明が主たる研究目標である。

特に、複素力学系研究における中心的予想のひとつである双曲性稠密予想には強い興味をもち、ヨコツ、ペレッツ・マルコ、マクマレン等の研究成果の統合を申請者が試みる過程で、ジエゲルコンパクトの解析という問題に至り、複素力学系研究における関連する中心問題のひとつである解析的線型化可能性問題の新しい方法論による考察が可能であることを発見するに至った。

なお、解析的線型化可能性問題は前世紀から研究が進められてきたが、無理的中立周期点の場合にはその解決は困難を極め、1940年前後のジエゲルやクレマーの重要な進展の後しばらく研究は停滞し、1970年前後のブリュノー、リュスマンを経て、1988年のヨコツの論文によっても、2次多項式の無理的中立固定点の場合が解決されたにすぎなかった。そのような行き詰まりを、力学系的タイヒミュラー空間という新たな設定により打開し完全解決に向けた今後の研究方向をも開拓した。申請者による主論文は、その高い独創性や著しい成果と共に、極めて重要な貢献を該当分野に与えるものといえる。

主論文では、従来の劣双曲多項式概念を拡張した  $n$ -劣双曲かつ区分的1-劣双曲な多項式が、固有値  $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$  を持つ無理的中立周期点で線型化可能であるならば、 $\alpha$  はブリュノー条件を満たすことを示すことに成功した。ここで解析的線型化可能性問題は上述のように、2次多項式の無理的中立固定点の場合にはヨコツが肯定的に解決し、そのような研究成果により1994年にフィールズ賞を得ているが、申請者は参考論文 *Non-Linearizability of Polynomials at Irrationally Indifferent Fixed Points* において、一般次数の多項式の無理的中立固定点における解析的線型化可能性と付随するタイヒミュラー空間の複素解析的性質とを結びつけ、1998年フィールズ賞受賞者のマクマレンらによる力学系的タイヒミュラー理論に基づく解析という全く新しい方法論を開発した。

その結果、3次多項式の線型化可能性をタイヒミュラー空間の非退化性で特徴付けるといふ、高次多項式の場合の解析的線型化可能性問題にとって重要な成果をあげているが、学位申請主論文ではその方法論をさらに深化させ、ヨコツの成功した場合の2次多項式の性質として、古典的な劣双曲性の概念を拡張する  $n$ -劣双曲性、および区分的1-劣双曲性という概念を導入した。この概念の導入は申請者の、この分野への深い造詣と秀逸な独創性により初めて可能になったものである。この新しい枠組みの下で、ヨコツやペレッツ・マルコらの幾何学的局所変形理論と、マクマレンやサリヴァンらの解析的大域変形理論とを融合させることにより、主定理の証明に成功している。

その証明において申請者は、与えられた多項式を区分的1-劣双曲性や解析的線型化可能な無理的中立周期点の存在を保存したまま、力学系的タイヒミュラー構造より緩やかな構造をもつアフィン構造表現空間において摂動させることにより、力学系的タイヒミュラー理論において一般的、すなわちそのタイヒミュラー次元が最大値を取るような、多項式の存在を示し、次にそのような一般的な多項式のタイヒミュラー空間の表現に注目することにより証明を完成させているが、このような議論もまた申請者の独創性の高さを物語る秀逸なものである。

申請者は主論文の内容を、イギリスのウォーリック大学を初め、ヨーロッパ各地で講演したが、たとえば複素解析学研究者のベアドン、ペーカー、ベルグワイラーの各教授や、力学系研究者のマニング、バン・ストリエン、ヨコツの各教授らから極めて高い評価を受けた。主論文の内容の重要性を示すものである。

以上の点からも、主論文は複素解析学・力学系理論における卓越した業績であり、これらの分野に極めて重要な寄与を与えるものである。従って、申請者奥山裕介は大学院在学が5年未満ではあるが、例外的な博士(理学)の学位の授与に十分値するものである。