京都大学防災研究所年報　第 54 号 B　平成 23 年 6 月
Annuals of Disas. Prev. Res. Inst., Kyoto Univ., No. 54 B, 2011

# ひずみ空間多重せん断モデルによる誘導異方性の表現

井合　進・飛田哲男

## 要　旨

ひずみ空間多重せん断モデルは, 任意方向の仮想単純せん断機構の重ね合わせの機構により粒状体の挙動を表現する。この機構は，粒状体の誘導異方性を反映する内部構造（微視的構造）を表現するもので，２階のファブリックテンソルで表現され，このテンソルにより巨視的ひずみが巨視的応力に関連づけられる。この枠組みでは，ひずみ空間ファブリックは，巨視的ひずみ場の個々の仮想単純せん断機構への投影として定義され，粒子間の相対変位の方向分布を表す。ひずみ空間ファブリックは，２次元では四つ葉のクローバー型をしており，履歴型双曲線関数を通じて応力空間ファブリックに変換される。応力空間ファブリックは，接点間の接点応力による微視的な応力の方向分布を表し，そのテンソル平均により，粒状体の巨視的な応力が与えられる。個別要素シミュレーションによって得られた接点力の方向分布を示すファブリックは, ひずみ空間多重せん断モデルによる結果と整合的であり，同モデルは粒状体の誘導異方性を的確に表現できることが示された。

**キーワード**: 異方性，構成式，ファブリックテンソル，粒状体，微視的力学，応力–ひずみ

## 1.　はじめに

ひずみ空間多重せん断モデルは，粒状体の力学的挙動を，任意方向の仮想単純せん断機構の重合せに基づいて表現する (Towhata and Ishihara, 1985; Iai et al., 1992a; Iai et al., 1992b; Iai and Ozutsumi, 2005). これらの機構は, 誘導異方性を有する粒状体の内部（微視的）構造を表現し，巨視的ひずみを巨視的応力に関連づける２階のファブリックテンソルを構成する。ひずみ空間多重せん断モデルに関する既往の研究は, 室内試験結果に基づいて巨視的な応力ひずみ挙動に焦点をあてて，その挙動を研究するものが中心であった。中には，微視的構造に基づいて，主応力軸回転中の粒状体の挙動について解明を試みた研究もあったが (Iai et al., 1994; Iai et al., 2010a)，限られた範囲の検討に留まっていた。

ひずみ空間多重せん断モデルでは，巨視的な応力ひずみに対応する微視的な応力ひずみは，仮想単純せん断応力ひずみとよばれ，これらが主要な役割を演じる。このうち，仮想単純せん断ひずみは，巨視的なひずみ場を個々の仮想単純せん断機構を表現する２階テンソルへの投影として定義される。他方，仮想単純せん断応力は，テンソル平均により巨視的な応力に寄与する基本要素として定義される。仮想単純せん断機構は，仮想単純せん断ひずみと仮想単純せん断応力とを履歴型非線形関数により関連づける。任意方向の仮想単純せん断ひずみの分布（以下，ひずみ空間ファブリックとよぶ)，および仮想単純せん断応力の分布（以下，応力空間ファブリック）は，粒状体の巨視的な変形の過程で，粒子間の接点の発生と消失による内部構造の変化をモデル化するものである。仮想単純せん断機構を表現する関数は非線形なので，応力空間ファブリックは，誘導異方性の基本モードのみならず高次のモードも表現できる可能性を有している。

本研究では，粒状体の巨視的な応力ひずみの変化により発生する誘導異方構造，すなわち，誘導ファブリック，の形成過程を明らかにすることを目的とする。ひずみ空間多重せん断モデルについての理解を助けるため，本論文では，Rothenburg and Bathurst (Rothenburg and Bathurst, 1989) により実施された個別要素法(DEM)による誘導異方性の研究の段階にまでさかのぼって，そこから解説を始める。この既往の研究と同様, 本研究では, 偏差成分に焦点をあて，微視的ならびに巨視的応力ひずみ関係について論じる。

## 2.　粒子の集合体と巨視的応力

連続体に定義されるような粒状体の巨視的応力は，粒子間の接点力のある種の平均により与えられる。平面内の円形粒子の集合体では，接点力 **P** は，接点垂直（もしくは粒子の中心を結ぶ枝）方向の成分 **n** およびこれに直交する接線方向成分 **t** に分解することができる（Fig. 1）

$$\mathbf{P} = f_\mathrm{n}\mathbf{n} + f_\mathrm{t}\mathbf{t} \tag{1}$$

ここに，

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^\mathrm{T} &= [n_1 \quad n_2] \\ \mathbf{t}^\mathrm{T} &= [t_1 \quad t_2] \end{aligned} \tag{2}$$

また

$$\begin{aligned} n_1 &= \cos\theta \\ n_2 &= \sin\theta \\ t_1 &= n_2 = \sin\theta \\ t_2 &= -n_1 = -\cos\theta \end{aligned} \tag{3}$$

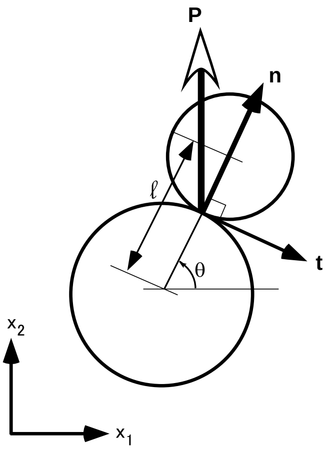


Fig. 1 Contact normal $\mathbf{n}$, tangential direction $\mathbf{t}$, and contact force $\mathbf{P}$

巨視的な応力は体積 $V$ なる代表体積要素における接点力の平均として，以下のとおり与えられる (Christoffersen et al., 1981; Mehrabadi et al., 1982)

$$\boldsymbol{\sigma}' = \frac{1}{V}\sum l\left(f_\mathrm{n}\mathbf{n}\otimes\mathbf{n} + f_\mathrm{t}\mathbf{t}\otimes\mathbf{n}\right) \tag{4}$$

ここに $l$ は枝の長さを表す。

Rothenburg and Bathurst (Rothenburg and Bathurst, 1989)に従い，式(4)は，接点密度（単位体積当たりの接点数） $m_\mathrm{v}$，平均枝長さ $\bar{l}_0$，および接点分布関数 $E(\theta)$により，以下のとおり書ける。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}' = m_\mathrm{v}\bar{l}_0 \Bigg[ &\int_0^{2\pi} f_\mathrm{n}(\theta)E(\theta)\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}\mathrm{d}\theta \\ &+ \int_0^{2\pi} f_\mathrm{t}(\theta)E(\theta)\mathbf{t}\otimes\mathbf{n}\mathrm{d}\theta \Bigg] \end{aligned} \tag{5}$$

ここに

$$\int_0^{2\pi} E(\theta)\mathrm{d}\theta = 1 \tag{6}$$

また，接点力成分を表す $f_\mathrm{n}$，$f_\mathrm{t}$ なる記号は，$\theta$ 方向についての平均的な成分として，定義し直している。.

式 (5) は，モーメントの釣合，すなわち，$\int_0^{2\pi} f_\mathrm{t}(\theta)E(\theta)(\mathbf{t}\otimes\mathbf{n} - \mathbf{n}\otimes\mathbf{t})\mathrm{d}\theta = 0$ を用いて，等方ならびに偏差成分に，以下のとおり分解することができる(Iai, 1993a)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}' = \frac{1}{2}m_\mathrm{v}\bar{l}_0 \Bigg[ &\int_0^{2\pi} f_\mathrm{n}(\theta)E(\theta)|\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}|\mathrm{d}\theta \\ &+ \int_0^{2\pi} f_\mathrm{n}(\theta)E(\theta)\langle\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}\rangle\mathrm{d}\theta \\ &+ \int_0^{2\pi} f_\mathrm{t}(\theta)E(\theta)\langle\mathbf{t}\otimes\mathbf{n}\rangle\mathrm{d}\theta \Bigg] \end{aligned} \tag{7}$$

ここに

$$\begin{aligned} |\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}| &= \mathbf{n}\otimes\mathbf{n} + \mathbf{t}\otimes\mathbf{t} \\ \langle\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}\rangle &= \mathbf{n}\otimes\mathbf{n} - \mathbf{t}\otimes\mathbf{t} \\ \langle\mathbf{t}\otimes\mathbf{n}\rangle &= \mathbf{t}\otimes\mathbf{n} + \mathbf{n}\otimes\mathbf{t} \end{aligned} \tag{8}$$

式(8)の成分は，以下のとおりである。

$$\begin{aligned} |\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}| &= \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}[n_1 \quad n_2] + \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}[t_1 \quad t_2] \\ &= \begin{bmatrix} n_1^2 + t_1^2 & n_1n_2 + t_1t_2 \\ n_2n_1 + t_2t_1 & n_2^2 + t_2^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & 0 \\ 0 & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I} \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \langle\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}\rangle &= \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}[n_1 \quad n_2] - \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}[t_1 \quad t_2] \\ &= \begin{bmatrix} n_1^2 - t_1^2 & n_1n_2 - t_1t_2 \\ n_2n_1 - t_2t_1 & n_2^2 - t_2^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta - \cos^2\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{10}$$

$$\langle \mathbf{t}\otimes\mathbf{n}\rangle = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_1 & n_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t_1 & t_2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2t_1n_1 & t_1n_2+t_2n_1 \\ t_2n_1+t_1n_2 & 2t_2n_2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta-\cos^2\theta \\ \sin^2\theta-\cos^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \end{bmatrix} \qquad (11)$$
$$= \begin{bmatrix} \sin 2\theta & -\cos 2\theta \\ -\cos 2\theta & -\sin 2\theta \end{bmatrix}$$

式(7)の第２および３項は，２軸せん断 $\langle \mathbf{n}\otimes\mathbf{n}\rangle$ および単純せん断 $\langle \mathbf{t}\otimes\mathbf{n}\rangle$ を表す。しかし，これらの項を２階のテンソルとして表現すると，両者は，角度 $\pi/4$ の相違を除けば，区別できなくなる（Fig. 2）。

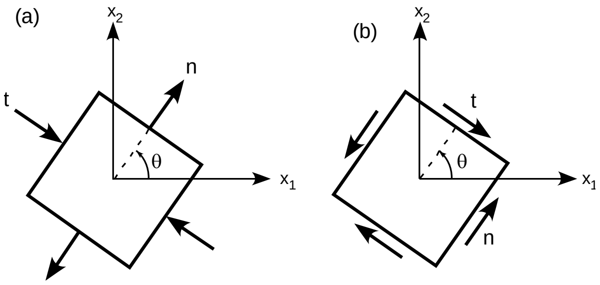


Fig. 2 Stress component in the direction of $\theta$ for defining two dimensional mechanisms: (a) biaxial shear $\langle \mathbf{n}\otimes\mathbf{n}\rangle$; (b) simple shear $\langle \mathbf{t}\otimes\mathbf{n}\rangle$

$\theta = \theta^* - \dfrac{\pi}{4}$ を式(10)に代入すると，

$$\langle \mathbf{n}\otimes\mathbf{n}\rangle = \begin{bmatrix} \sin 2\theta^* & -\cos 2\theta^* \\ -\cos 2\theta^* & -\sin 2\theta^* \end{bmatrix} \qquad (12)$$

よって，式(7)の第２項は，以下のとおり書ける。

$$\int_0^{2\pi} f_{\mathrm{n}}(\theta)E(\theta)\begin{bmatrix} \sin 2\theta^* & -\cos 2\theta^* \\ -\cos 2\theta^* & -\sin 2\theta^* \end{bmatrix}\mathrm{d}\theta$$
$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} f_{\mathrm{n}}\left(\theta^*-\frac{\pi}{4}\right)E\left(\theta^*-\frac{\pi}{4}\right)\begin{bmatrix} \sin 2\theta^* & -\cos 2\theta^* \\ -\cos 2\theta^* & -\sin 2\theta^* \end{bmatrix}\mathrm{d}\theta^*$$
$$= \int_0^{2\pi} f_{\mathrm{n}}\left(\theta^*-\frac{\pi}{4}\right)E\left(\theta^*-\frac{\pi}{4}\right)\begin{bmatrix} \sin 2\theta^* & -\cos 2\theta^* \\ -\cos 2\theta^* & -\sin 2\theta^* \end{bmatrix}\mathrm{d}\theta^* \qquad (13)$$

同様に，式(7)の第３項は，以下のとおり書ける。

$$\int_0^{2\pi} f_{\mathrm{t}}(\theta)E(\theta)\begin{bmatrix} \sin 2\theta & -\cos 2\theta \\ -\cos 2\theta & -\sin 2\theta \end{bmatrix}\mathrm{d}\theta$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} f_{\mathrm{t}}(\theta)E(\theta)\begin{bmatrix} \sin 2\theta & -\cos 2\theta \\ -\cos 2\theta & -\sin 2\theta \end{bmatrix}\mathrm{d}\theta \qquad (14)$$
$$= \int_0^{2\pi} f_{\mathrm{t}}(\theta^*)E(\theta^*)\begin{bmatrix} \sin 2\theta^* & -\cos 2\theta^* \\ -\cos 2\theta^* & -\sin 2\theta^* \end{bmatrix}\mathrm{d}\theta^*$$

よって，式(7)は，以下のように単純化される。

$$\boldsymbol{\sigma}' = \frac{1}{2}m_v\bar{l}_0\int_0^{2\pi} f_{\mathrm{n}}(\theta)E(\theta)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathrm{d}\theta$$
$$+\frac{1}{2}m_v\bar{l}_0\int_0^{2\pi}\left( f_{\mathrm{n}}\left(\theta^*-\frac{\pi}{4}\right)E\left(\theta^*-\frac{\pi}{4}\right)+f_{\mathrm{t}}(\theta^*)E(\theta^*)\right)$$
$$\times\begin{bmatrix} \sin 2\theta^* & -\cos 2\theta^* \\ -\cos 2\theta^* & -\sin 2\theta^* \end{bmatrix}\mathrm{d}\theta^* \qquad (15)$$

これをシンボリックなテンソル形式で書き換えれば，

$$\boldsymbol{\sigma}' = \frac{1}{2}m_v\bar{l}_0\int_0^{2\pi} f_{\mathrm{n}}(\theta)E(\theta)\mathrm{d}\theta\mathbf{I}$$
$$+\frac{1}{2}m_v\bar{l}_0\int_0^{2\pi}\left( f_{\mathrm{n}}\left(\theta^*-\frac{\pi}{4}\right)E\left(\theta^*-\frac{\pi}{4}\right)+f_{\mathrm{t}}(\theta^*)E(\theta^*)\right)$$
$$\times\langle \mathbf{t}\otimes\mathbf{n}\rangle^*\,\mathrm{d}\theta^* \qquad (16)$$

ここに，テンソル $\langle \mathbf{t}\otimes\mathbf{n}\rangle^*$ は反時計まわりに $\pi/4$ だけ角度 $\theta$ について回転した以下の項である。

$$\langle \mathbf{t}\otimes\mathbf{n}\rangle^* = \begin{bmatrix} \sin 2\theta^* & -\cos 2\theta^* \\ -\cos 2\theta^* & -\sin 2\theta^* \end{bmatrix} \qquad (17)$$

$\int_0^{2\pi}\langle \mathbf{t}\otimes\mathbf{n}\rangle^*\,\mathrm{d}\theta^* = \mathbf{0}$ を用いると，式(16)は以下のとおり書き換えられる。

$$\boldsymbol{\sigma}' = \frac{1}{2}m_v\bar{l}_0\bar{f}_0$$
$$+\frac{1}{2}m_v\bar{l}_0\int_0^{2\pi}\left[\left( f_{\mathrm{n}}\left(\theta^*-\frac{\pi}{4}\right)E\left(\theta^*-\frac{\pi}{4}\right)-\bar{f}_0\bar{E}_0\right)\right. \qquad (18)$$
$$\left.+f_{\mathrm{t}}(\theta^*)E(\theta^*)\right]\langle \mathbf{t}\otimes\mathbf{n}\rangle^*\,\mathrm{d}\theta^*$$

ここに，平均垂直成分 $\bar{f}_0$ および平均接点分布 $\bar{E}_0$ は，以下で与えられる。

$$\bar{f}_0 = \int_0^{2\pi} f_{\mathrm{n}}(\theta)E(\theta)\mathrm{d}\theta \qquad (19)$$

$$\bar{E}_0 = \frac{1}{2\pi} \qquad (20)$$

よって，式(18)の各項を以下のとおり書けば

$$p = -\frac{1}{2}m_v\bar{l}_0\bar{f}_0$$
$$q = m_v\bar{l}_0\left(\left( f_{\mathrm{n}}\left(\theta^*-\frac{\pi}{4}\right)E\left(\theta^*-\frac{\pi}{4}\right)-\bar{f}_0\bar{E}_0\right)+f_{\mathrm{t}}(\theta^*)E(\theta^*)\right) \qquad (21)$$

式(18)は，以下のとおりとなる。

$$\boldsymbol{\sigma}' = -p\mathbf{I}+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} q\langle \mathbf{t}\otimes\mathbf{n}\rangle^*\,\mathrm{d}\theta^* \qquad (22)$$

関数 $q$ およびテンソル $\langle \mathbf{t}\otimes\mathbf{n}\rangle^*$ の各成分は，$2\theta^*$ についての周期関数となるので，$q\langle \mathbf{t}\otimes\mathbf{n}\rangle^*$ なる項は，$4\theta^*$ についての周期性を持つ。よって，式(22)は，以

下のとおり書き換えることができる

$$\boldsymbol{\sigma}' = -p\mathbf{I} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} q\langle \mathbf{t}\otimes\mathbf{n}\rangle^* \mathrm{d}\theta^* \tag{23}$$

積分変数 $\theta^*$ を $\omega = 2\left(\theta^* - \dfrac{\pi}{4}\right) = 2\theta$ なる変数で置き換え，$\langle \mathbf{t}\otimes\mathbf{n}\rangle^*$ から「 $^*$ 」記号を省略して表記すると，式(23)は，以下のとおり書ける。

$$\boldsymbol{\sigma}' = -p\mathbf{I} + \int_0^{\pi} q\langle \mathbf{t}\otimes\mathbf{n}\rangle \mathrm{d}\omega \tag{24}$$

$$\langle \mathbf{t}\otimes\mathbf{n}\rangle = \begin{bmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ \sin\omega & -\cos\omega \end{bmatrix} \tag{25}$$

なお，等方成分を微視的成分による寄与として書き直せば，以下のとおり書ける。

$$p = \int_0^{\pi} p^* \mathrm{d}\omega \tag{26}$$

ここに

$$p^* = \frac{1}{\pi} p \tag{27}$$

よって，式(24)は，微視的な等方および偏差的成分により，以下のとおり書表すことができる。

$$\boldsymbol{\sigma}' = \int_0^{\pi} \left[ -p^* |\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}| + q\langle \mathbf{t}\otimes\mathbf{n}\rangle \right] \mathrm{d}\omega \tag{28}$$

式(24)ないし(28)は，ひずみ空間多重せん断モデルの基本式であり，これにより，巨視的な応力を，粒状体の微視的な応力成分（多重せん断機構による）の平均として表している。

## 3. ひずみ空間多重せん断モデル

積分形の構成式（直接応力ひずみ関係を与える形式）は，式(24)で与えられる構造を通じて巨視的なひずみテンソル $\boldsymbol{\varepsilon}$ を巨視的な有効応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}'$ に関連づけることにより与えられる (Iai, 1993a)。この関係を導くための第 1 ステップとして，体積ひずみ $\varepsilon$（伸張を正）および仮想単純せん断ひずみ $\gamma$ を，巨視的なひずみ場から体積成分および仮想単純せん断成分を表現する 2 階テンソルへの投影として，以下のように与える。

$$\varepsilon = \mathbf{I} : \boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} \gamma(\omega) &= \langle \mathbf{t}\otimes\mathbf{n}\rangle : \boldsymbol{\varepsilon} \\ &= (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})\cos\omega + (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21})\sin\omega \end{aligned} \tag{30}$$

ここに，「:」記号は 2 重縮合を表す。ダイレイタンシーによる体積ひずみ $\varepsilon_{\mathrm{d}}$ の影響を考慮するため，有効体積ひずみ $\varepsilon'$ (Iai, 1993b) を以下により導入する

$$\varepsilon' = \varepsilon - \varepsilon_{\mathrm{d}} \tag{31}$$

式(31)と(30)により巨視的ひずみ場の投影として定義されるスカラー変数により，それぞれ等方的応力 $p$ および式(24)の仮想単純せん断応力 $q$ を以下のように履歴型関数を用いて与える。

$$p = p(\varepsilon') \tag{32}$$

$$q = q(\gamma(\omega)) \tag{33}$$

ひずみ空間多重せん断モデルでは，仮想単純せん断機構は，履歴型非線形関数で与えられ，その骨格曲線は以下のような双曲線関数により与えられる (Hardin and Drnevich, 1972)。

$$q(\gamma(\omega)) = \frac{\gamma(\omega)/\gamma_{\mathrm{v}}}{1 + |\gamma(\omega)/\gamma_{\mathrm{v}}|} q_{\mathrm{v}} \tag{34}$$

双曲線関数におけるパラメタ $q_{\mathrm{v}}$ and $\gamma_{\mathrm{v}}$ は，それぞれ仮想単純せん断機構におけるせん断強度および参照ひずみを表し，これらは，巨視的なせん断強度 $\tau_{\mathrm{m}}$ およびせん断弾性係数 $G_{\mathrm{m}}$ により以下のとおり与えられる(Iai et al., 1992a)。

$$q_{\mathrm{v}} = \frac{\tau_{\mathrm{m}}}{\int_0^{\pi} \sin\omega \mathrm{d}\omega} = \frac{\tau_{\mathrm{m}}}{2} \tag{35}$$

$$\gamma_{\mathrm{v}} = \left( \frac{\int_0^{\pi} \sin^2\omega \mathrm{d}\omega}{\int_0^{\pi} \sin\omega \mathrm{d}\omega} \right) \gamma_{\mathrm{m}} = \frac{\pi}{4}\gamma_{\mathrm{m}} \tag{36}$$

巨視的なせん断強度は内部摩擦角 $\phi_{\mathrm{f}}$ により $\tau_{\mathrm{m}} = p\sin\phi_{\mathrm{f}}$ で与えられ，$\gamma_{\mathrm{m}} = \tau_{\mathrm{m}}/G_{\mathrm{m}}$ が動土質力学において用いられることが多い参照ひずみとなる。

定式化を完結するため，ひずみ空間多重せん断モデルにおける微視的ならびに巨視的ひずみエネルギー関係を導いておく。ひずみ空間多重せん断モデルにおけるひずみエネルギー速度 $\dot{W}$ は，式(24), (29)および(30)により，次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \boldsymbol{\sigma}' : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left( -p\mathbf{I} + \int_0^{\pi} q\langle \mathbf{t}\otimes\mathbf{n}\rangle \mathrm{d}\omega \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ &= -p\dot{\varepsilon} + \int_0^{\pi} q\dot{\gamma} \mathrm{d}\omega \end{aligned} \tag{37}$$

式(37)は，以下のように書き直せる。

$$\dot{W} = \boldsymbol{\sigma}' : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{W}_p + \int_0^{\pi} \dot{W}_{q\mathrm{v}} \mathrm{d}\omega \tag{38}$$

ここに，

$$\dot{W}_p = -p\dot{\varepsilon} \tag{39}$$

$$\dot{W}_{\mathrm{qv}} = q\dot{\gamma} \tag{40}$$

式(38)は，巨視的ひずみエエンルギー速度 $\dot{W} = \boldsymbol{\sigma}' : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ を，ひずみ空間多重せん断モデルを構成する仮想単純せん断機構による微視的ひずみエネルギー速度 $\dot{W}_{\mathrm{qv}} = q\dot{\gamma}$ により表す基本式となる。

式(32)および(33)により表現されるひずみ空間多重せん断モデルは，巨視的なひずみ場を，ひずみ誘導異方性を有する２階のファブリックテンソルを通じて巨視的な有効応力に関連づける最も単純なものである。更なる詳細は参考文献(Iai et al., 2010b)を参照されたい。この文献では，ダイレイタンシーの定式化および定式化の３次元への拡張を示している。

ひずみ空間多重せん断モデルは，Calladine (Batdorf and Budiansky, 1949; Calladine, 1971)や Pande and Sharma (Pande and Sharma, 1983)により提案されている多重すべり・多重ラミネート構造モデルとは根本的に異なる。 Fig. 3 に示すとおり，ひずみ空間多重せん断モデルでは，粒状体の粒子が，平均的には，巨視的なひずみ場と整合的な挙動を示すと考えている。この仮定により，微視的なひずみが式(29)および(30)による巨視的なひずみの投影として与えられる。他方，多重すべり・多重ラミネート構造モデルでは，局所的ひずみが多重すべりにより発生すると考えており，これらの居所的ひずみは，巨視的なひずみ場とは著しく異なる可能性がある。これら２つのモデルは，線形弾性関係を微視的（局所的）機構に仮定する場合には，相互に一致するが，一般には，非線形関係ないし破壊基準を微視的（局所的）機構に仮定するので，両モデルは根本的に異なることとなる。この点については，さらに第５章において，誘導応力ファブリックの解析との関連で，さらに具体的な議論へと進める。

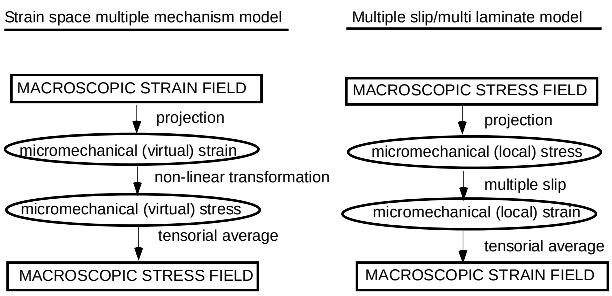


Fig. 3 Conceptual background to the two families of multiple mechanism models

## 4. 誘導異方性に寄与する要因

ひずみ空間多重せん断モデルを通じて誘導ファブリックの検討を行うに先立って，巨視的な等方および偏差応力成分に寄与する微視的な要因について，さらに詳しく検討してみる。式(28)の等方応力成分に対する微視的な成分の寄与は，式(18)右辺の第１項より，以下のとおりとなる。

$$p^* = -m_v \bar{l}_0 \bar{f}_0 \bar{E}_0 \tag{41}$$

式(18)における偏差成分への微視的な成分の寄与は，$f_{\mathrm{n}}(\theta^*)$, $E(\theta^*)$ の平均（すなわち $\bar{f}_0$，$\bar{E}_0$）を用いて，以下のとおり書ける。

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} m_v \bar{l}_0 \int_0^{2\pi} \left( f_{\mathrm{n}}\left(\theta^* - \frac{\pi}{4}\right) E\left(\theta^* - \frac{\pi}{4}\right) - \bar{f}_0 \bar{E}_0 \right) \langle \mathbf{t} \otimes \mathbf{n} \rangle \mathrm{d}\theta^* \\
&= \frac{1}{2} m_v \bar{l}_0 \int_0^{2\pi} \left[ \left\{ \bar{f}_0 + \left( f_n\left(\theta^* - \frac{\pi}{4}\right) - \bar{f}_0 \right) \right\} \right. \\
&\quad \left. \times \left\{ \bar{E}_0 + \left( E\left(\theta^* - \frac{\pi}{4}\right) - \bar{E}_0 \right) \right\} - \bar{f}_0 \bar{E}_0 \right] \langle \mathbf{t} \otimes \mathbf{n} \rangle \mathrm{d}\theta^* \\
&\approx \frac{1}{2} m_v \bar{l}_0 \int_0^{2\pi} \bar{f}_0 \left( E\left(\theta^* - \frac{\pi}{4}\right) - \bar{E}_0 \right) \langle \mathbf{t} \otimes \mathbf{n} \rangle \mathrm{d}\theta^* \\
&\quad + \frac{1}{2} m_v \bar{l}_0 \int_0^{2\pi} \left( f_n\left(\theta^* - \frac{\pi}{4}\right) - \bar{f}_0 \right) \bar{E}_0 \langle \mathbf{t} \otimes \mathbf{n} \rangle \mathrm{d}\theta^*
\end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} m_v \bar{l}_0 \int_0^{2\pi} f_{\mathrm{t}}(\theta^*) E(\theta^*) \langle \mathbf{t} \otimes \mathbf{n} \rangle \mathrm{d}\theta^* \\
&= \frac{1}{2} m_v \bar{l}_0 \int_0^{2\pi} f_{\mathrm{t}}(\theta^*) \left[ \bar{E}_0 + \left( E(\theta^*) - \bar{E}_0 \right) \right] \langle \mathbf{t} \otimes \mathbf{n} \rangle \mathrm{d}\theta^* \\
&\approx \frac{1}{2} m_v \bar{l}_0 \int_0^{2\pi} f_{\mathrm{t}}(\theta^*) \bar{E}_0 \langle \mathbf{t} \otimes \mathbf{n} \rangle \mathrm{d}\theta^*
\end{aligned} \tag{43}$$

ここに，異方性に寄与する成分の２次の項は無視できるとしている (Rothenburg and Bathurst, 1989)。
すると，式(21)における偏差成分に寄与する主要な微視的要因は以下で書きあらわされる。

$$q \approx q_{\mathrm{n}}^E + q_{\mathrm{n}}^f + q_{\mathrm{t}} \tag{44}$$

ここに

$$\begin{aligned}
q_{\mathrm{n}}^E &= m_v \bar{l}_0 \bar{f}_0 \left( E\left(\theta^* - \frac{\pi}{4}\right) - \bar{E}_0 \right) \\
q_{\mathrm{n}}^f &= m_v \bar{l}_0 \left( f_{\mathrm{n}}\left(\theta^* - \frac{\pi}{4}\right) - \bar{f}_0 \right) \bar{E}_0 \\
q_{\mathrm{t}} &= m_v \bar{l}_0 f_{\mathrm{t}}(\theta^*) \bar{E}_0
\end{aligned} \tag{45}$$

変数 $\theta^*$ を $\omega = 2(\theta^* - \pi/4) = 2\theta$ で置き換えると，式(45)は，以下のように書き換えられる。

$$
\begin{aligned}
q_{\mathrm{n}}^{E} &= m_{\mathrm{v}}\bar{l}_0\bar{f}_0\left(E\left(\frac{\omega}{2}\right)-\bar{E}_0\right)\\
q_{\mathrm{n}}^{f} &= m_{\mathrm{v}}\bar{l}_0\left(f_{\mathrm{n}}\left(\frac{\omega}{2}\right)-\bar{f}_0\right)\bar{E}_0\\
q_{\mathrm{t}} &= m_{\mathrm{v}}\bar{l}_0 f_{\mathrm{t}}\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\bar{E}_0
\end{aligned}
\tag{46}
$$

Rothenburg and Bathurst が実施した 1000 個の個別要素を用いた DEM シミュレーション結果によれば, ピークせん断応力時には，以下のとおりである (Rothenburg and Bathurst, 1989)。

$$
\begin{aligned}
\max\left|q_{\mathrm{n}}^{E}\right| &= a m_{\mathrm{v}}\bar{l}_0\bar{f}_0\bar{E}_0\\
\max\left|q_{\mathrm{n}}^{f}\right| &= a_{\mathrm{n}} m_{\mathrm{v}}\bar{l}_0\bar{f}_0\bar{E}_0\\
\max\left|q_{\mathrm{t}}\right| &= a_{\mathrm{t}} m_{\mathrm{v}}\bar{l}_0\bar{f}_0\bar{E}_0
\end{aligned}
\tag{47}
$$

ここに

$$
\begin{aligned}
a &= 0.22\\
a_{\mathrm{n}} &= 0.53\\
a_{\mathrm{t}} &= 0.17
\end{aligned}
\tag{48}
$$

式(46)におけるすべての関数が $\omega$ について位相差がないものとすると，

$$
\max|q| = (a+a_{\mathrm{n}}+a_{\mathrm{t}}) m_{\mathrm{v}}\bar{l}_0\bar{f}_0\bar{E}_0 \tag{49}
$$

式(44)における接点力の垂直および接線成分により生成される巨視的応力の割合を，それぞれ $r_{\mathrm{n}}$ および $r_{\mathrm{t}}$ として，

$$
\begin{aligned}
q_{\mathrm{n}}^{f} &= r_{\mathrm{n}} q(\gamma(\omega))\\
q_{\mathrm{t}} &= r_{\mathrm{t}} q(\gamma(\omega))
\end{aligned}
\tag{50}
$$

と書けば，これらの割合は，以下で与えられる。

$$
\begin{aligned}
r_{\mathrm{n}} &= \frac{a_{\mathrm{n}}}{a+a_{\mathrm{n}}+a_{\mathrm{t}}}\\
r_{\mathrm{t}} &= \frac{a_{\mathrm{t}}}{a+a_{\mathrm{n}}+a_{\mathrm{t}}}
\end{aligned}
\tag{51}
$$

式(41)および式(46)の第２項より，

$$
q_{\mathrm{n}}^{f} = m_{\mathrm{v}}\bar{l}_0 f_{\mathrm{n}}\left(\frac{\omega}{2}\right)\bar{E}_0 + p^{*} \tag{52}
$$

これに式(50)を代入すると，

$$
m_{\mathrm{v}}\bar{l}_0 f_{\mathrm{n}}\left(\frac{\omega}{2}\right)\bar{E}_0 = -p^{*} + r_{\mathrm{n}} q(\gamma(\omega)) \tag{53}
$$

よって，平均接点力に対する接点力の垂直成分の比は，以下で与えられる。

$$
\begin{aligned}
\frac{f_{\mathrm{n}}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\bar{f}_0} &= \frac{-p^{*}+r_{\mathrm{n}} q(\gamma(\omega))}{-p^{*}}\\
&= 1 - r_{\mathrm{n}}\frac{q(\gamma(\omega))}{p^{*}}
\end{aligned}
\tag{54}
$$

式(27)および(35)により，

$$
q_{\mathrm{v}} = \frac{\pi\sin\phi_{\mathrm{f}}}{2} p^{*} \tag{55}
$$

以上により，式(54)は，仮想単純せん断強度および内部摩擦角により，以下のとおり書くことができる。

$$
\frac{f_{\mathrm{n}}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\bar{f}_0} = 1 - r_{\mathrm{n}}\frac{\pi\sin\phi_{\mathrm{f}}}{2}\frac{q(\gamma(\omega))}{q_{\mathrm{v}}} \tag{56}
$$

ここに，$q(\gamma(\omega))/q_{\mathrm{v}}$ なる項は，式(34)から計算できる。

同様に，平均接点力に対する接点力の接線成分の比は，以下で与えられる。

$$
\begin{aligned}
\frac{f_{\mathrm{t}}\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\bar{f}_0} &= -r_{\mathrm{t}}\frac{q(\gamma(\omega))}{p^{*}}\\
&= -r_{\mathrm{t}}\frac{\pi\sin\phi_{\mathrm{f}}}{2}\frac{q(\gamma(\omega))}{q_{\mathrm{v}}}
\end{aligned}
\tag{57}
$$

## 5. 誘導ファブリックの生成過程

式(25) (29)および(30)により定義されるひずみ空間多重せん断モデルにおいて，巨視的ひずみテンソルは, 仮想単純せん断ひずみ $\gamma(\omega)$ のテンソル平均として，以下のとおり与えることができる。

$$
\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\varepsilon\mathbf{I} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\gamma(\omega)\langle\mathbf{t}\otimes\mathbf{n}\rangle\mathrm{d}\omega \tag{58}
$$

このように，ひずみ空間ファブリックは，微視的なひずみの動員分布を表現するもので，式(30)により $\gamma(\omega)$ であらわされる。応力空間ファブリックは，接点力の動員分布を表現するもので，式(24)により $q(\gamma(\omega))$ であらわされ，式(33)に示すように，ひずみ空間ファブリックから履歴型非線形関数による変換で表される。

粒状体における微視的なひずみの動員についてのより厳密な検討は，粒子間の相対変位のテンソル平均として行うことができる(Satake, 2004)。巨視的応力を接点での粒子間力のテンソル平均として与える式(4)とは異なり，巨視的ひずみの定義には，直接接触していない接点間の相対変位の寄与を考慮する必

要がある。したがって，巨視的ひずみの定義を与える際に解決すべき本質的問題は，接触していない接点のペアのうちで, 巨視的ひずみに貢献するもの（比較的距離が近いもの）と，貢献しないもの（あまりに離れすぎていてひずみの定義には無関係のもの）とをどのようにして区別するかという問題に帰着する。Satake (Satake, 2004)は，この問題を，粒状体のDirichlet 分割(Dirichlet, 1850)を通じて解決し, 巨視的ひずみに貢献する接触していない接点のペアをDirichlet 分割の双対グラフにより定義される仮想枝で連結されるペアとして定義した。式(58)における仮想せん断ひずみテンソル $\gamma(\omega)\langle\mathbf{t}\otimes\mathbf{n}\rangle$ は，Satake(Satake, 2004)により定義された巨視的ひずみに寄与する接点間相対変位の方向別のテンソル平均分布の基本モード近似に相当するものと解釈できる。

Fig. 4 に, ひずみ空間多重せん断モデルによる計算された巨視的二軸せん断時の 2 次元的ファブリックを示す。式(30)において，巨視的二軸せん断時には $\varepsilon_{12}=\varepsilon_{21}=0$ となるので，ひずみ空間ファブリック（Fig. 4(a)）は，以下の式で計算される。

$$\gamma(\omega)=(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})\cos\omega \tag{59}$$

応力空間ファブリック（Fig. 4(b)）は，ひずみ空間ファブリックから，式(34)により計算される。巨視的な軸差せん断ひずみ $\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}$ は，$\omega=0$ 方向への仮想せん断ひずみ $\gamma$ と一致することから，巨視的ひずみの動員の度合いを正規化した $\gamma(0)/\gamma_v$ により表現することとした。Fig. 4 におけるプラス(+)およびマイナス(−)の符号は，$\gamma(\omega)$ and $q(\gamma(\omega))$ の正負を表す。Fig. 4(a)に示すとおり，ひずみ空間ファブリックは巨視的軸差ひずみ $\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}$ の増大に比例して, 分布形状を変化させずに成長する。Fig. 4(b)に示すとおり，応力空間ファブリックは，スリムな四つ葉のクローバー型から，次第に葉が肥った形状に変化していき，最終的には，仮想せん断強度 $q_v$ を半径とする円を覆うようになる。円全体が隙間なく覆われた時, ひずみ空間多重せん断モデルにより表現される粒状体は巨視的せん断破壊に至る。

Fig. 5 は，仮想単純せん断応力とひずみが，個々の仮想せん断機構において，成長する様子を示している。なお，同図には，$\omega/2=\pi/4$ の場合の結果を省略しているが，これは，この方向には，微視的せん断応力ひずみの動員が常にゼロとなるためである。仮想単純せん断応力は $\omega=0$ の方向で最も早く成長し，この方向で最も早く仮想単純せん断強度で規定される上限値に到達する。これ以外の方向への仮想単純せん断応力の成長は遅いが，最終的には，同じ上限値に到達し，その到達が最終的には $\omega=\pi/4$ の方向に向けて，順次完成していく。このような機構が，四つ葉で表現される応力空間はブリックの葉の幅が次第に幅を広げ肥っていく結果をもたらしている（Fig. 4(b)）。

多重すべり/多重ラミネート構造モデル(Batdorf and Budiansky, 1949; Calladine, 1971; Pande and Sharma, 1983)では，局所的応力の方向分布は，巨視的応力場と整合するものと仮定し，局所的応力を巨視的応力場の投影として与えている（Fig. 3）。このモデルでは，局所での微視的機構としてすべり機構を仮定しているため，局所的ひずみは，すべりが最初に発生したすべり面に集中する傾向を示す。参考文献に，その分布系の例が見られる。このように，ひずみ空間多重せん断モデルは，多重すべり/多重ラミネート構造モデルとは，根本的に異なる。

Fig. 4 および 5 に示すファブリックは, ひずみ空間多重せん断モデルに即して表示したものである。し

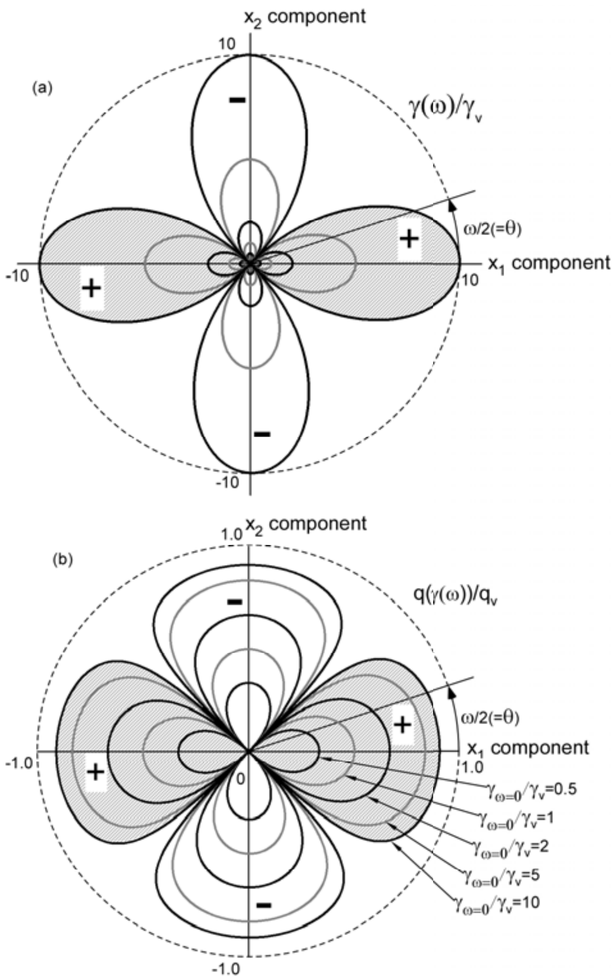


Fig. 4 Evolution of fabric during biaxial shear; (a) strain space fabric, (b) stress space fabric

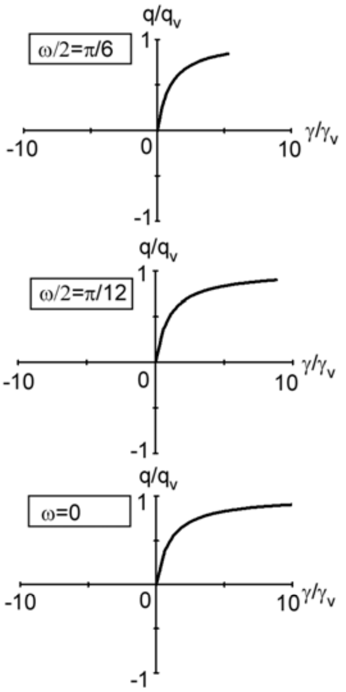


Fig. 5 Evolution of virtual simple shear strain and stress during biaxial shear

かし，既往の研究による誘導ファブリックは，粒子挙動を比較的直接的に表現したものとなっている(Oda et al., 1985; Rothenburg and Bathurst, 1989)。これらの既往の研究では，接点力の垂直成分の方向分布については，等方成分および偏差成分への区別なしに，合体した形で示している。

比較のため，Fig. 4(b)に示す応力空間ファブリック $q(\gamma(\omega))$ に，式(54)（ないし式(56)）による等方的応力空間ファブリック $p^*$ を合体させた。Rothenburg and Bathurst (Rothenburg and Bathurst, 1989)による個別要素シミュレーションでは，ピークせん断応力比は $\sin\phi_{\mathrm{f}} = 0.43$ （内部摩擦角 $\phi_{\mathrm{f}} = 25^{\circ}$ に相当）と与えられ，接点力垂直成分の寄与度は $r_{\mathrm{n}} = 0.53/(0.22+0.53+0.17) = 0.58$ となるので，これらを用いて，合体した応力空間ファブリックを式(56)により求めた。Fig. 6(a)に示す応力空間ファブリックは，基本的には個別要素シミュレーション結果と整合する。ここで，貢献度の度合い $r_{\mathrm{n}}$ がファブリックにどのような影響を与えるかについて検討するため，Fig. 6(b)に，$r_{\mathrm{n}} = 1.0$ として場合の応力空間ファブリックを示す。この場合には，ファブリックの形状は鉛直方向に長細くなり中央のくびれが強調される傾向を示す。Fig. 6(c)は，標準的な中程度の密度の砂を念頭に，$\sin\phi_{\mathrm{f}} = 0.64$ （$\phi_{\mathrm{f}} = 40^{\circ}$）および $r_{\mathrm{n}} = 1.0$ の条件で計算したファブリックである。鉛直

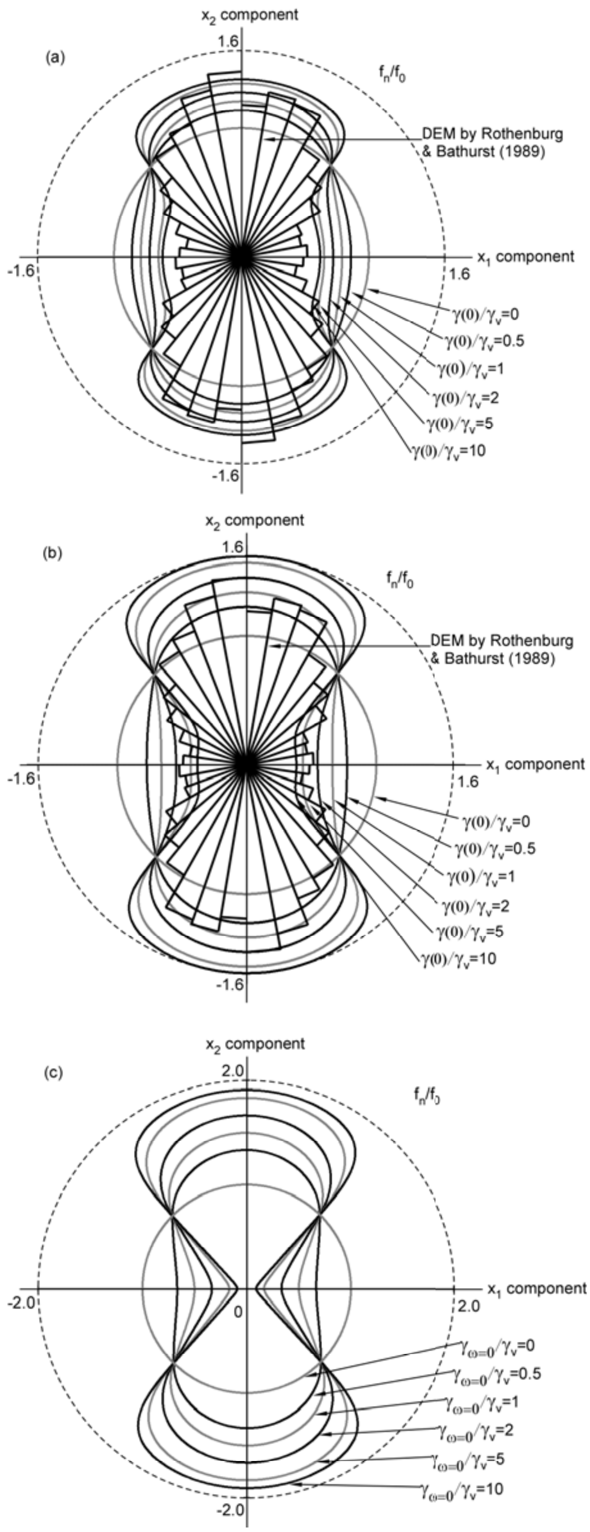


Fig. 6 Evolution of stress space fabric combined with isotropic fabric during biaxial shear; $f_{\mathrm{n}}/\overline{f}_0\left(=1-r_{\mathrm{n}}q/p^*\right)$ representing normal component of contact forces (DEM simulation by Rothenburg & Bathurst (Rothenburg and Bathurst, 1989) with modification); (a) $r_{\mathrm{n}}=0.58$ and $\sin\phi_{\mathrm{f}}$ =0.43, (b) $r_{\mathrm{n}}=1.0$ and $\sin\phi_{\mathrm{f}}$ =0.43, (c) $r_{\mathrm{n}}=1.0$ and $\sin\phi_{\mathrm{f}}$ =0.64

方向に長細くなり中央のくびれがさらに強調される。

同様に，Fig. 7 は，式(57)により接点力の接線成分の方向分布を計算したものである。いずれのケースにおいても，ひずみ空間多重せん断モデルによるファブリックと個別要素シミュレーションによるファブリックが完全に一致することはないが，ファブリックの全体的な形状としては，個別要素シミュレーションによって解析された形状の特徴を，ひずみ空間多重せん断モデルにより適切に表現していることがわかる。

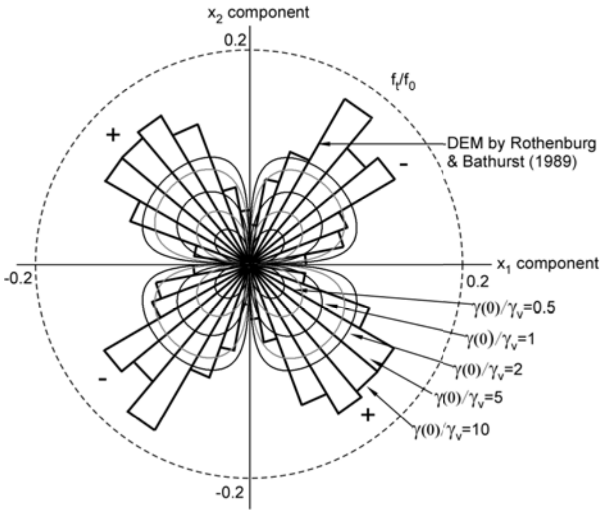


Fig. 7 Evolution of stress space fabric during biaxial shear; $f_{\mathrm{t}}/\overline{f}_0\left(=-r_{\mathrm{t}}q/p^*\right)$ ( $r_{\mathrm{t}}=0.18$ ) representing tangential component of contact forces (DEM simulation by Rothenburg & Bathurst [7] with modification)

## 6. 結論

本研究では，ひずみ空間多重せん断モデルを用いて，粒状体の誘導ファブリックを議論した。ひずみ空間多重せん断モデルは，任意方向の仮想単純せん断機構の重ね合わせにより粒状体の挙動を表現しようとするものである。この機構は，粒状体の誘導異方性を反映する内部構造（微視的構造）を表現するもので，２階のファブリックテンソルで表現され，このテンソルにより巨視的ひずみが巨視的応力に関連づけられる。二軸せん断の条件下では，ひずみ空間ファブリックは四つ葉のクローバー形状を示し，巨視的な軸差せん断ひずみに比例して，形状を変化させずに成長する。これに対して，応力空間ファブリックは次第に肥っていく四つ葉の形状を示し，最終的には仮想せん断強度により規定される半径を持つ円を覆っていく。円全体が完全に覆われた時，粒状体には巨視的なせん断破壊の状態が訪れる。等方的な応力空間ファブリックの寄与分を合成した複合応力空間ファブリックは，個別要素シミュレーションによって得られた接点力の垂直成分の方向分布を示すファブリックと整合的であった。また，背接点力の接線成分の方向分布を示すファブリックも，ひずみ空間多重せん断モデルによる結果と整合的であった。これらのことから，ひずみ空間多重せん断モデルは，粒状体の誘導異方性を的確に表現することができると考えられる。

## 参考文献


Batdorf, S.B. & Budiansky, B. (1949). "A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip," *National Advisory Committee for Aeronautics*, TN 1871.

Calladine, C.R. (1971). "A microstructural view of the mechanical properties of saturated clay," *Geotechnique*, 21(4), 391-415.

Christoffersen, J., Mehrabadi, M.M. & Nemat-Nasser, S. (1981). "A micromechanical description of granular material behavior," *Journal of Applied Mechanics*, 48, 339-344.

Dirichlet, G.L. (1850). "Uber die reduction der positiven quadratischen formen mit drei unbestimmten ganzen zahlen," *J. Reine Angew. Math.*, 40, 209-227.

Hardin, B.O. & Drnevich, V.P. (1972). "Shear modulus and damping in soils: design equation and curves," *Journal of Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, 98(SM7), 667-692.

Iai, S., Matsunaga, Y. & Kameoka, T. (1992a). "Strain space plasticity model for cyclic mobility," *Soils and Foundations*, 32(2), 1-15.

Iai, S., Matsunaga, Y. & Kameoka, T. (1992b). "Analysis of undrained cyclic behavior of sand under anisotropic consolidation," *Soils and Foundations*, 32(2), 16-20.

Iai, S. (1993a). "Micromechanical background to a strain space multiple mechanism model for sand," *Soils and Foundations*, 33(1), 102-117.

Iai, S. (1993b). "Concept of effective strain in constitutive modeling of granular materials," *Soils and Foundations*, 33(2), 171-180.

Iai, S., Kameoka, T. & Towhata, I. (1994). "Analysis of non-coaxiality by multi-mechanism model," *Proc. 8th International Conference on Computer Methods and Advances in*

*Geomechanics,* Morgantown, 599-604.
Iai, S. & Ozutsumi, O. (2005). "Yield and cyclic behaviour of a strain space multiple mechanism model for granular materials," *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics,* 29(4), 417-442.
Iai, S., Tobita, T., Ozutsumi, O. & Ueda, K. (2010a). "Dilatancy of granular materials in a strain space multiple mechanism model," *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics,* 34, (in print).
Iai, S., Tobita, T., Ozutsumi, O. & Ueda, K. (2010b). "Dilatancy of granular materials in a strain space multiple mechanism model," *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics,* 34, (in print) published online nag.899.
Mehrabadi, M.M., Nemat-Nasser, S. & Oda, M. (1982). "On statistical description of stress and fabric in granular materials," *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics,* 6(1), 95-108.
Oda, M., Nemat-Nasser, S. & Konishi, J. (1985). "Stress-induced anisotropy in granular masses," *Soils and Foundations,* 25(3), 85-97.
Pande, G.N. & Sharma, K.G. (1983). "Mutilaminate model of clays - a numerical evaluation of the influence of rotation of principal stress axes," *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics,* 7(4), 397-418.
Rothenburg, L. & Bathurst, R.J. (1989). "Analytical study of induced anisotropy in idealized granular materials," *Geotechnique,* 39(4), 601-614.
Satake, M. (2004). "Tensorial form definitions of discrete-mechanical quantities for granular assemblies," *International Journal of Solids and Structures,* 41, 5775-5791.
Towhata, I. & Ishihara, K. (1985). "Modelling soil behaviour under principal stress axes rotation," *Proc. 5th Int. Conf. on Numerical Methods in Geomechanics,* Nagoya, Balkema, 523-530.

## Evolution of Induced Fabric in a Strain Space Multiple Mechanism Model for Granular Materials

Susumu IAI and Tetsuo TOBITA

**Synopsis**

The strain space multiple mechanism model idealizes the behavior of granular materials based on a multitude of virtual simple shear mechanisms oriented in arbitrary directions. These mechanisms idealize the internal (or micromechanical) structure of granular materials with induced anisotropy and form a second order fabric tensor, which relates macroscopic strain to macroscopic stress. Within this framework, the strain space fabric is defined as a projection of the macroscopic strain field onto an individual virtual simple shear mechanism oriented in arbitrary directions and represents the measure of mobilization of micromechanical strain due to the relative displacements between the particles. The strain space fabric, which is shaped like a four leaf clover in two dimensions, induces another fabric in stress space through a hyperbolic function, which governs the virtual simple shear mechanisms. Comparison with Discrete Element Method (DEM) simulation suggests that the strain space multiple mechanism model has the potential to capture the essential features in the evolution of an induced fabric in granular materials.

**Keywords:** anisotropy, constitutive equation, fabric tensor, granular material, micromechanics, stress-strain