氏　　名　中本和典（なかもと　かずのり）

学位(専攻分野)　博　士（理　学）

学位記番号　理博第2244号

学位授与の日付　平成12年5月23日

学位授与の要件　学位規則第4条第1項該当

研究科・専攻　理学研究科数学・数理解析専攻

学位論文題目　Representation varieties and character varieties
（表現多様体と指標多様体）

論文調査委員　（主査）教授 丸山正樹　教授 上野健爾　助教授 森脇　淳

論文内容の要旨

群や代数の表現の同値類のモジュライを $\mathbf{Z}$ 上構成した申請者の主論文における研究は，代数幾何においても数論や表現論などの他分野においても今後さまざまな応用が期待できるものである。例えば，申請者の参考論文における，射影平面上のベクトル束のモジュライの記述についての研究は表現のモジュライが有効かつ広範な応用を持つことを示唆している。

以下，詳しく申請者の主論文の結果を述べることにする。Γ は群であるとする。スキーム X 上の Γ の n 次表現とは，群準同型

$$\rho : \Gamma \to \mathrm{GL}_n(\Gamma(X, O_X))$$

のことをいう。X 上の n 次表現 ρ が絶対既約表現であるとは，各点 $x \in X$ に対して，体上の表現

$$\Gamma \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_n(\Gamma(X, O_X)) \to \mathrm{GL}_n(k(x))$$

が普通の意味で絶対既約になっているときにいう。スキーム X 上の n 次表現 ρ, ρ' が同値であるとは，ある $\Gamma(X, O_X)$-代数同型

$$\sigma : \mathrm{M}_n(\Gamma(X, O_X)) \to \mathrm{M}_n(\Gamma(X, O_X))$$

が存在して，$\sigma(\rho(\gamma)) = \rho'(\gamma)$ が各 $\gamma \in \Gamma$ で成り立つときにいう。

このとき，申請者は次のモジュライ函手に関して粗モジュライスキームが存在することを示した。

$$\begin{aligned} \mathrm{EqAIR}_n(\Gamma) : (\mathrm{Sch}) &\to (\mathrm{Sets}) \\ X &\mapsto \{\rho \mid \Gamma \text{ の } X \text{ 上の } n \text{ 次絶対既約次表現}\}/\sim \end{aligned}$$

粗モジュライスキームは，$\mathbf{Z}$ 上分離的スキームであり，群 Γ が有限生成のときは，$\mathbf{Z}$ 上有限型となる。

さらに，申請者は群 Γ の n 次表現に関する反変函手

$$\begin{aligned} \mathrm{Rep}_n(\Gamma)_{\mathrm{a.i.r.}} : (\mathrm{Sch}) &\to (\mathrm{Sets}) \\ X &\mapsto \{\rho \mid \Gamma \text{ の } X \text{ 上の } n \text{ 絶対既約次表現}\} \end{aligned}$$

は，$\mathbf{Z}$ 上のスキームで represent され，表現の同値類の粗モジュライ上 PGL_n-主束となることを証明した。このことにより，X 上の絶対既約表現 ρ, ρ' について，ρ と ρ' が同値であるための必要十分条件は $\mathrm{tr}(\rho(\gamma)) = \mathrm{tr}(\rho'(\gamma))$ が各 $\gamma \in \Gamma$ について成立することであることがわかる。

スキーム $\mathrm{Rep}_n(\Gamma)_{\mathrm{a.i.r.}}$ を representation variety（の絶対既約部分）と呼び，絶対既約表現の同値類のモジュライを character variety と呼ぶ。上の結果は，群の場合だけでなく，半群やモノイド，結合代数，リー環に対しても成立する。

この基本定理の証明には，申請者によるスキーム上の表現に対する絶対既約性や同値性などの合理的な定式化と，次の補題が基礎になっている。

R は可換環であるとし，$A_1, A_2, \cdots\cdots, A_{n^2}$ は $\mathrm{M}_n(R)$ の R-基底であるとする。このとき，任意の $X \in \mathrm{M}_n(R)$ に対して，

$$X=(A_1,\ A_2,\ \cdots\cdots,\ A_{n^2})\,T\begin{pmatrix}\mathrm{tr}(A_1X)\\ \mathrm{tr}(A_2X)\\ \vdots\\ \mathrm{tr}(A_{n^2}X)\end{pmatrix}$$

が成り立つ。ここで，

$$T=\begin{pmatrix}\mathrm{tr}(A_1A_1) & \mathrm{tr}(A_1A_2) & \cdots & \mathrm{tr}(A_1A_{n^2})\\ \mathrm{tr}(A_2A_1) & \mathrm{tr}(A_2A_2) & \cdots & \mathrm{tr}(A_2A_{n^2})\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathrm{tr}(A_{n^2}A_1) & \mathrm{tr}(A_{n^2}A_2) & \cdots & \mathrm{tr}(A_{n^2}A_{n^2})\end{pmatrix}$$

である。

上の補題は，容易に証明されるが，不変式から行列Xを復元するという点において重要である。これを用いることにより，representation variety への PGL_n の作用を調べることが出来る。representation variety の PGL_n による普遍幾何学的商多様体をとることで，character variety が構成される。

論文審査の結果の要旨

代数幾何的対象のモジュライを記述する際，ある種の群や代数系の表現が利用できる場合がよくある。M. S. Narasimhan, C. S. Seshadri による，基本群の既約ユニタリ表現を介した種数２以上の非特異射影曲線上の安定ベクトル束の記述はその一例である。申請者がその参考論文で研究している，射影平面上の安定ベクトル束のモジュライについての，行列による記述もまた一つの例といえる。

このように，表現のモジュライについては様々な応用が考えられる。従って，表現のモジュライを現代的な枠組で，より一般的に定式化することは，非常に重要なことである。申請者は，絶対既約の合理的な概念を一般の係数環上の表現について導入し，主論文において$\mathbf{Z}$上絶対既約表現の同値類のモジュライを構成した。申請者が，あらゆる群や代数系に対してその表現のモジュライを構成したことは，種々のモデュライ理論の基礎付けを与えたことになり，この分野における貢献は計り知れないものがある。

以下，申請者の主論文の結果を少し詳しく述べる。Γは群であるとし，Xはスキームであるとする。X上のΓの表現

$$\rho:\Gamma\to \mathrm{GL}_n(\Gamma(X,\ \mathcal{O}_X))$$

が絶対既約であるとは，任意の点$x\in X$に対して，$\rho_x:\Gamma\to\mathrm{GL}_n(k(x))$ が絶対既約であるときにいう。X上のn次表現ρ, ρ'が同値であるとは，ある $\Gamma(X,\ \mathcal{O}_X)$-代数同型

$$\sigma:\mathrm{M}_n(\Gamma(X,\ \mathcal{O}_X))\to \mathrm{M}_n(\Gamma(X,\ \mathcal{O}_X))$$

が存在して，$\sigma(\rho(\gamma))=\rho'(\gamma)$ が各$\gamma\in\Gamma$に対して成立するときをいう。新たに導入したこれらの定義の下で，申請者は次の主定理を得た。

スキームの圏から集合の圏への反変函手

$$\begin{aligned}(\mathrm{Sch})&\to(\mathrm{Sets})\\ X\quad&\mapsto\{\rho\,|\,X\text{上の}\Gamma\text{の}n\text{次絶対既約表現}\}/\sim\end{aligned}$$

に関し，粗モジュライが存在する。粗モジュライは，$\mathbf{Z}$上の分離的スキームであり，Γが有限生成群の場合は，$\mathbf{Z}$上有限型となる。

また反変函手

$$\begin{aligned}(\mathrm{Sch})&\to(\mathrm{Sets})\\ X\quad&\mapsto\{\rho\,|\,X\text{上の}\Gamma\text{の}n\text{次絶対既約表現}\}\end{aligned}$$

は，$\mathbf{Z}$上のスキームによって represent されるが，粗モジュライ上PGL_n-主束の構造をもつ。これより，

スキームX上のn次絶対既約表現ρ, ρ'が同値であるための必要十分条件は，$\mathrm{tr}(\rho(\gamma))=\mathrm{tr}(\rho'(\gamma))$ が各 $\gamma\in\Gamma$ で成り立つことである。

を得た。この最後の簡明な結果は，Carayol や Serre によって弱い形では得られていたが，申請者によってより一般的な形

が得られた。上では，群Γについて説明したが，一般の半群，モノイド，結合代数，リー代数についても，同様にその表現のモジュライが構成される。

これらの結果を得るため，申請者は以下の独創的なアイデアを用いた。まず，表現のモジュライを構成する際にスキーム上の表現に関して，絶対既約性などの新たな概念を導入した。2次の表現のモジュライについては，齋藤恭司によりすでに構成されていたが，その証明は煩雑な計算をともなうもので，その方法では一般の次数の表現のモジュライを構成することは出来なかった。しかし申請者によるこの定式化により，一般の次数のモジュライの構成が可能となった。

不変式から行列や表現を復元する公式の発見は，群 PGL の表現多様体への作用を調べる上で重要である。申請者の得た公式は簡単ではあるが，表現のモジュライの構成には欠かせない道具となっている。この道具により，申請者は煩雑な計算を回避できた。

表現のモジュライは，代数幾何学におけるモジュライの構成に応用されるだけでなく，数論や表現論にも密接な関連がある。表現のモジュライは，基本的な対象であるがゆえに，今後さまざまな分野に対して幅広く応用されるといえよう。

申請者の論文は，新たな概念と独創的な手法を導入して，表現のモジュライという基本的な対象の構成に成功した。上に述べたようにこの結果は種々のモデュライ理論の基礎をなすものであり，関連諸分野への応用も期待される。以上のことから，本申請論文は博士（理学）の学位論文として価値のあるものと認める。

なお，平成12年4月10日，主論文および参考論文に報告されている研究業績を中心とし，それに関連した研究分野について口頭試問した結果，合格と認めた。