氏　　　名	濱　地　賢太郎（はま ち けんたろう）
学位(専攻分野)	博　士（理　学）
学 位 記 番 号	理　博　第2245号
学位授与の日付	平 成 12 年 5 月 23 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研究科・専攻	理 学 研 究 科 数 学・数 理 解 析 専 攻
学位論文題目	Quantum Moment Maps and Invariants for G-invariant Star Products. （G不変スター積の量子運動量写像と不変量について）
論文調査委員	(主 査) 助教授 小 嶋　泉　　教 授 齋 藤 恭 司　　教 授 室 田 一 雄

論　文　内　容　の　要　旨

Poisson manifold（典型例は symplectic manifold）上の C^{∞} 函数が作る可換代数を基礎に，bidifferential operators の（プランク定数を不定元と見なした）形式べき級数の作用で可換積を量子—古典対応が成立つように非可換積に変形することによって量子論の数学的記述を目指すアプローチを「変形量子化」deformation quantization という［当然代数も形式べき級数に拡大］。申請者は修士課程2年次以降この分野を中心テーマとし，微分幾何学的手法に基づく研究を行ってきた。具体的な内容は以下の通りである。

1）G不変スター積の量子運動量写像と不変量について

（主論文：Quantum Moment Maps and Invariants for G-invariant Star Produds）

上に述べた量子化変形で得られる非可換積は通例 star product と呼ばれるが，一般に異なる変形に基づく star products が（代数構造に関して）同型な非可換代数を与えることはしばしば起きる：例えば，平坦な symplectic space R^{2n} では何れの変形もすべて標準的な正準交換関係の代数に同型。こうした変形は同値な変形と呼ばれ，数学的には微分作用素の形式べき級数として与えられた同型写像（代数構造に関する）の存在によって定義される。可能な量子化変形のすべての同値類を枚挙し分類することは重要な数学的課題であると共に，変形の特定の記述法から独立な理論の物理的内容を引き出す上で物理的にも重要な課題であるが，de Rham コホモロジーに基づく抽象的パラメータ付けを除いて，満足すべき具体性のレベルでの理論的解決は得られていない。申請者の研究では，その一般的解決に資する目的で当面考察を群作用を持つ symplectic manifolds の場合に限定し，そこでの star product に関する不変量を具体的に構成して，それが確かに非同値変形の間で異なる値を取ることを確認した。ただし群Gの作用に伴って，量子化変形の同値性を定義する同型写像にはG-不変性の要求が付加され，一般的な star products の同値性ではなく，G-invariant star products に関するG-同値性を論じている点に注意する必要がある。また，非同値変形の分類にとってこの不変量だけで十分か否かは今後の研究を待たねばならない。上の目的のため申請者は，

i）2つのG-invariant star products のG-同値性が各G-invariant star product に対応する2つの quantum moment maps がG-同値写像で相互に移り合うという条件と同値である

ことを証明し，それに基づいて quantum moment map を基本的道具として用いた。その存在と一意性の条件は既知であったが，与えられた star produd からそれを決定するには見かけ上高階偏微分を含んだ帰納的関係式を解かねばならず，従来その具体的表式は全く知られていなかった。これに対して，申請者は

ii）quantum moment map を定める方程式を一階の偏微分方程式に帰着させる

ことに成功し，多くの quantum moment maps の具体的表示を可能にした。これらの基本概念に基づき，

iii）G-同値性で不変な求めるG-invariant star product の不変量は，GのLie環の普遍包絡環を変形量子化して得られる代数（Gutt algebra）の中心元の quantum momentum map による像として定義される。

このiii）の具体的な計算例として，

iv）R^2 上の Moyal star product および，S^2 上の２つの非同値な star products に関して定義された不変量を展開の２次の項まで求めている。

２）量子化による「古典的異常項」解消の問題

（参考論文１：K. Hamachi, Quantm Smoothening of ‘Classical Anomaly’, Lett. Math. Phys. 40, 257-267(1997)）

通常「量子異常項」の議論では，古典系に対して想定された対称性あるいはその他の望ましい性質が，量子論への移行に際しどのような場合にどのような形で破れ，量子系には受け継がれなくなるか？　ということが論じられる。この論文ではそれとは逆に，「どのような物理量の組に対して，古典論における Poisson 括弧式の意味での非可換性が，量子論の交換子においては解消するか？」という問題を取り上げ，変形量子化の枠組で量子力学系を取り扱うことによって，自由度１の場合に包括的な解答を与える結果を得たものである。この問題は量子化変形理論の事実上の創始者ともいうべき故 M. Flato 教授によりその日本滞在中に提起されたもので，結果の導出は申請者の独力による。

３）G 不変スター積の新しい不変量

（参考論文２：K. Hamachi, A New Invariant for G-invariant Star Products, Lett. Math. Phys. to appear）

この論文は，今回主論文として提出された研究成果の内容を先取りし，典型的な具体例を供給した S^2 の場合に不変量の計算を遂行することによって，進むべき基本方向を明らかにしたという点で重要な意義を持つものである。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

量子化変形の理論は，任意の Poisson manifolds における変形の一般的存在証明が Kontsevitch により与えられ，また Gerstenhaber algebra や operads との興味深い関連を通じて，近年非常に研究が活発化するに至った分野であるが，申請者はそのような活況が始まる以前の時点から，幾何学的手法と代数的構造との接点を求めて基礎的な研究を行ってきた。

主論文は，群作用のある状況下での量子化変形を G-同値性の概念に基づいて分類する目的で，quantum moment map を巧妙に用いて新しい不変量を定義し，その具体的計算を遂行したものである。この問題の背景をなすのは，量子化変形の高次項をある範囲で動かしても，それから定まる非可換積を持つ量子系の代数構造自体はしばしば不変に保たれる（変形の同値性）にもかかわらず，そのような状況で計算される物理量のスペクトルには高次項変更の影響が出てしまうという逆説的な事態がある。これは，与えられた数学的構造の枚挙とその分類，という抽象レベルでの数学の問題であるに留まらず，変形量子化によって得られた数学的枠組が現実的な意味を持った物理量・「量子数」の定義を保証する上で不可避の重要な問題である。にも関わらず，現状では満足すべき一般的理解には到達していない。

その解決を目指す目的でまず対称性を導入して状況を扱い易い形に限定し，群作用に付随したある種の微分幾何学的不変量を導入して，それに基づく代数構造の分類を考えるという申請者の採用したアプローチは，上述のような幾何学的・代数的視点の合流点として妥当な選択と言える。もちろん，不変量の構成と幾つかの具体例によるその有効性の検証だけでは理論的に不十分だとしても，次の点に鑑みてこれが今後の研究への重要な礎石を与えるものであることは間違いないだろう。なぜなら，得られた成果は上述の結果に留まるものではなく，不変量の定義とその具体的計算を可能にしたのは，G-同値性と quantum moment map とを結びつける基本的な命題と後者の具体的表式を導く方程式の発見，更にその表式に現れる star product の局所性により基礎多様体の任意の局所座標を用いてよいという事情の解明が，本質的に効いている。今後これらは関連する問題の考察においても有効な手法として広く活用されることが期待されると共に，そうした方向への研究の展開・発展が上の不変量の理解を深めるに役立つだろうと予想されるからである。

参考論文１における「古典的異常項」の量子化による解消の問題の考察は，結果的にその後の申請者の研究における理論的展開の中心核と結びつかないままに終わったテーマとはいえ，量子化変形理論の枠組と distribution の理論の一部を駆使して，自由度１の場合の包括的解答を得ることに成功しており，故 M. Flato 教授からの高い評価も得た研究活動の開始時点での重要な一歩と言えるものである。

参考論文２は，主論文の内容の原型となった典型例 S^2 での不変量の計算遂行と，それによって理論展開の基本方向を明確にした点で重要な論文である。この結果は，今日における量子化変形理論の隆盛を用意し，その発展の牽引力となってき

た故 M. Flato 教授を中心とするフランス・ブールゴーニュ大学理学部物理数学教室の数理物理学研究グループからも既に高い評価を受けている。

以上のように，本申請論文は，問題に関与する本質的構造をフルに動員して，将来性のある道具を開発し，具体的計算の遂行と共に，今後の課題への展望を与えた研究として，高く評価すべき内容を備え，理学博士の学位論文として価値あるものと認められる。なお，平成12年４月３日に，主論文に報告された研究業績を中心としこれに関連した研究分野について試問をおこなった結果，合格と認めた。