

氏 名	よし い だい ご 吉 井 大 吾
学位(専攻分野)	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	理 博 第 2267 号
学位授与の日付	平 成 12 年 11 月 24 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研究科・専攻	理 学 研 究 科 数 学 ・ 数 理 解 析 専 攻
学位論文題目	A GENERALIZATION OF KAC - MOODY ALGEBRAS AND THE SERRE RELATIONS (カッツームーディ代数とセル関係式のある一般化)
論文調査委員	(主 査) 教 授 齋 藤 恭 司 教 授 柏 原 正 樹 教 授 三 輪 哲 二

論 文 内 容 の 要 旨

単純特異点とその普遍変型族及びその同時特異点解消は対応する単純代数群より構成できることは Gothenriedck-Brieskorn 理論として知られている。更にその単純代数群は、更に単純な組み合わせ論的な対象であるところの(有限)ルート系により決定される事も古典的理論として、よく知られている。他方、ここに出てきたところの有限ルート系は元の単純特異点の消滅サイクルのなす集合としてとらえられ、そのルート系の Killing 形式も、消滅サイクルの交叉形式として、とらえられる事も Brieskorn により知られている。即ち、単純特異点、(有限)ルート系そして、半単純代数群は互いに他を決定しあっている。果たして、この様に美しい三位一体の理論体系はこれで完結しているものなのであろうか。齋藤(恭司)は、ルートの集合の有限性及び Killing 形式の正定値性等の条件をゆるめて、一般化されたルート系の概念を導入し、それにより任意偶数次元超曲面特異点に付随する消滅サイクルの集合をとらえると共に、「その一般化された(無限)ルート系に対し(無限次元)リー環を構成し、更には、その(無限次元)リー環により、元の超曲面特異点の普遍変型族及び付随する原始形式を再構成せよ」という、いわゆる逆問題を提起した。吉井による当学位論文は、この逆問題のある特別な場合に対して部分的なしかし決定的な解答を与えるものである。

その結果を述べる為にまず、一般化されたルート系の分類について簡単にふれる。一般化されたルート系はその Killing 形式の符号 (ℓ_+, ℓ_0, ℓ_-) とすると、Witt index $= \ell_0 + \ell_-$ であるが、Witt index ≤ 2 のルート系は、次の様に名付けられている。

$(\ell, 0, 0)$ 有限型

$(\ell, 1, 0)$ アフィン型, $(\ell+1, 0, 1)$ ハイパボリック型

$(\ell, 2, 0)$ 楕円型, $(\ell+1, 1, 1)$ カスプ型, $(\ell+2, 0, 2)$ e-ハイボリック型

ここで、有限型ルート系は既に、単純リー環に対応することをみたが、アフィン型、ハイパボリック型のルート系は Kac-Moody リー環と自然に対応することもすぐわかる。残る楕円型、カスプ型そして e-ハイパボリック型はそれぞれ楕円型特異点、カスプ型特異点そして、1-モジュラ例外型特異点に対応する(場合を含む)ルート系たちである。それらの場合は、ワイル群がどのような実領域にも固有に作用しないために、ワイルの部屋が存在せず、従って、古典理論にあるような自然な単純ルート基底は存在しない。

他方、楕円型ルート系については、exponent の理論に基づく基底が存在し、申請者は参考論文において齋藤と共同で、その場合のリー環を決定している。

本申請論文において申請者は、その楕円型の理論を、ある特別なクラスのカスプ型ルート系(それらはカスプ型特異点に対応する場合を含んでいる)に拡張して、カスプ型リー環と呼ぶべき新しいクラスのリー環を構成し、それらがある普遍性を持つことを示した。以下に更に詳しく説明する。

R_c をカスプ型ルート系とし、その単純基底 Γ_c を以下の様に構成しておく。まず、 R_c をその Killing 形式の 1 次元 radic-

alで剰余したハイパボリック型ルート系 R_h の単純ルート基底 Γ_h のグラフは高々2つの分岐点と持つ木と仮定する。その二つの分岐点の間にあるルート基底に対し、radical 方向に変位した最初のルートの集合を Γ^*_{max} とおき、 $\Gamma_c := \Gamma_h \cup \Gamma^*_{max}$ とおくのである。この Γ_c を用いて以下の様にして、リー環 $g(R_c)$ を以下の様に生成系とその基本関係式で定義する。

生成系：各 $\alpha \in \Gamma_c$ に対し sl_2 -triplet $\langle e_\alpha, f_\alpha, h_\alpha \rangle$ をとる。

基本関係：1) h_α 等は、可換リー環 $\mathfrak{h}$ を生成し、 $g(R_c)$ は η により同時固有空間分解する。2) e_α 等は、Serre 関係をみたす。即ち $\alpha, \beta \in \Gamma_c$ かつ $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$ に対し、 $ad(e_\alpha)^{1-\langle \alpha, \beta \rangle} e_\beta = 0$ 。 f_α 等も同様に Serre 関係をみたす。

3) e_α, f_α 等は一般化された Serre 関係をみたす。即ち、 $\alpha, \alpha^*, \beta \in \Gamma_c (\alpha \in \Gamma^*_{max})$ の時 $[e_\beta, e_\alpha, e_{\alpha^*}] = 0$ 。 $\gamma, \alpha, \alpha^*, \beta \in \Gamma_c$ の時 $[e_\beta, e_\alpha, e_\gamma, e_{\alpha^*}] = 0$ 。 $\alpha, \alpha^*, \beta, \beta^* \in \Gamma_c$ の時 $[e_{\alpha^*}, f_\alpha, e_\beta] - e_{\beta^*} = 0$ 、等々。

以上の準備の下に、申請論文の主要結果は以下の通りである。

定理1. $g(R_c)$ は η に関して、同時固有空間分解する。その実ルート（即ちノルムが正のルート）の集合は R_c と一致し、かつ実ルートに対応するルート空間の次元（＝重複度）はすべて1である。

2. 逆に、 g を Γ_c の頂点に付随する sl_2 -trilets により生成され、それらは上記関係1), 2) を満たすとする。更にもし、 g の各実ルートの重複度が1であるならば、自然な上へのリー環準同型写像： $g(R_c) \rightarrow g$ が存在する。すなわち g において、一般化された Serre 関係3) は自動的に満たされる。

論文審査の結果の要旨

無限次元のリー環は近年、(アフィン) Kac-Moody リー環やヴィラソロ代数、あるいは、それらと関連する代数の研究等、大きく進展しつつある。しかし、他方、幾何学に由来する様な Witt index が2 (以上) となるルートに対応するリー環については、長らくその定義関係式の決定も含めて、未解明であった。申請論文は其中で、特にカスプ型の場合について、定義関係式を与えると共に、それらが或る普遍性を持つことを示すという画期的な結果を与える仕事である。

申請者は、申請論文に先立つ参考論文(齋藤と共著)において、simply laced 楕円リー環の三つの異なる表示：1) 頂点作用素による実現、2) 生成系と基本関係式による表示、そして3) アフィン Kac-Moody リー環とハイゼンベルク代数の合成による表示を与えていた。この楕円リー環は現在楕円の共形場の理論と結びつき、重要性を増しているが、他方、上記の2) において与えられた、一般化された Serre 関係式の持つ必然性については必ずしも充分説明されてこなかった。

申請論文は、これらの一般化された Serre 関係式を新たに、或る単純ルート基底を持つカスプルート系に適用することにより、新たなクラスのリー環 g を構成した。すると、それらのリー環はハイパボリック Kac-Moody リー環とハイゼンベルク・リー環の合成表示が得られ、それより実ルートの重複度が1という自然な要請が満たされることが示せる。しかるに、この様な“自然な要請”である「1) ルート空間分解の存在、2) 実ルートの集合はカスプルート系となる、3) 各実ルートの重複度は1となる。」を満たすリー環は自動的に一般化された Serre 関係式を満たすことが申請論文により示された。すなわち、 g は上記の“自然な要請”を満たすリー環の中で最も普遍的なものであることが示されたのである。これにより、楕円ルート系及びカスプルート系における一般化された Serre 関係式の持つ必然的な役割が示されたといえる。

一般的に楕円型ワイル群やカスプ型ワイル群はもはや Coxeter 群でなく、それらは Coxeter 関係式のみならず一般化された Coxeter 関係式を用いることにより決定されることが知られている。その時、注目すべきことは、この一般化された Coxeter 関係式を記述するのに必要とする三項及び四項関係式がちょうど一般化された Serre 関係式を記述するのに必要とする三項及び四項関係式とが対応しているという事実である。しかし、これらの事実の内的必然性について充分説明されているわけではない。

他方、更に注目すべき点は、これらの一般化された Serre 関係式が、ある重要な e-ハイパボリックルート系の基底にも適用が可能となることである。当然それらの場合に e-ハイパボリック・リー環が一般化された Serre 関係式により定義されるのか、それとも更に新たな関係式が必要となるのか、今後の重要な研究課題となる。その解明にも、当申請論文は重要な鍵を与えるものと思われる。

以上のように申請論文は Witt index が2となるルート系に対応するリー環の研究に寄与するところが大きく、学位論文として価値あるものと認める。申請論文に報告されている研究業績を中心にして、これに関連した分野について試問した結果、合格と認めた。