ラッセルの置き換え理論とその位置づけ

伊藤　遼*

1.　はじめに

ラッセル（Bertrand Russell）は、論理主義の実現を目指した、その歩みの中で一時的に、「置き換え理論 substitutional theory」と呼ばれる論理体系を展開した。数学の哲学におけるラッセルの歩みは、論理主義の立場が示された *Principles of Mathematics*（以下、PoM）に始まり、数年間の試行錯誤を経て、ホワイトヘッドとの共著 *Principia Mathematica*（以下、PM）において、ひとつの完成を見る。置き換え理論とは、その試行錯誤の数年間に展開されていた論理体系に他ならない。しかしながら、置き換え理論は、それに固有のパラドクスの発見がきっかけとなって、やがてラッセル自らの手によって放棄されてしまう。

数学の哲学におけるラッセルの歩みを理解する上で、置き換え理論は重要な題材である。しかし、それをめぐるラッセルの論文ないし草稿は、1973 年にその一部が公表されるまで、ほとんど知られていなかった。そして、それらの多くは、今でもアーカイブに眠ったままである。そこで、置き換え理論を知る上で、ラッセル自身の公表された草稿と並んで重要となるのが、置き換え理論研究の第一人者、グレゴリー・ランディニ（Gregory Landini）の業績である。本稿は、置き換え理論について、その論理体系を簡潔に説明した上で（2 節）、ランディニが示す、ラッセルの歩みへの全く新しい解釈を紹介し（3 節）、かつ、それに対して検討を加える（4 節）ものである。

2.　置き換え理論の論理体系

置き換え理論の体系は、PM で示された、タイプとオーダーつきの述語変項の体系、すなわち「分岐タイプ理論」と大きく異なる。まずは、置き換え理論がいかなるものであるか、ラッセル自身の定義に従って、簡単に紹介しよう。

2.1　置き換えという操作

置き換え理論における基本的な命題は、「置き換え substitution」という操作を表す次のような型の命題（proposition）である。

$$p/a; x!q$$

この命題が表す直観的な意味は、「p に現れる a を（もしあれば）すべて x に置き換えた結果、q が得られる」ということである (Russell, 1906a, p.168)。このとき、p、a、

x、q は、それぞれなんらかの「存在者 entity」を指示する表現でなければならない[(1)]。この意味で、置き換えとは、単なる表現上の操作ではなく、存在者に対する操作である。そして、置き換えという操作のふるまいは、例えば、次のような公理によって定められる (Landini, 1998, p.99)。

$*12.2 \qquad (\exists q)(p/a; x!q).$

$*12.201 \qquad p/a; x!q . p/a; x!r . \supset . q = r.$

このふたつの公理は、置き換えという操作がつねに一意的に定まる結果を持つ、ということを保証している。これにより、“ $p/a; x$ ”という記号列で、「p に現れる a を（もしあれば）すべて x に置き換えた結果」を表すとすると、それは、ひとつの確定記述として見なすことができる。それゆえ、“ $p/a; x$ ”は次のように定義できる (*ibid.*, p.129)。

$*12.12 \qquad p/a; x =\mathrm{df}\ (\imath q)(p/a; x!q).$

この定義における、$\imath$ 演算子は、確定記述によって特定される存在者を項として扱うことを表している。

さらに、置き換えという操作は、複数個の存在者を置き換える場合へと拡張することができる（multiple substitution）。例えば、ふたつの存在者を置き換える場合は、次のような型の命題で表される。

$$p/a, b; x, y!q$$

この命題は、「p に現れる a、b について、（もしあれば）a を x に、b を y にすべて置き換えた結果、q が得られる」と理解できよう。このような命題は、ひとつの存在者に対する置き換えを 2 回行なうという形で定義される。そして、こういった定義は、n 個の存在者に対する置き換えへと容易に拡張できる。n 個の存在者に対する“ multiple substitution ”の定義もまた、ひとつの存在者に対する置き換えのみから与えられる。

2.2　置き換えによるクラスの構成

さて、次に、いかにして置き換え理論の体系がクラスの理論を構成できるのか、簡単に見ることにしよう。置き換え理論において、述語変項の体系における「述語」、すなわち「命題関数 propositional function」にあたるのが、「マトリクス」と呼ばれるものである。

マトリクスとは、“ $p/a; x!q$ ”という型の命題における“ p/a ”にあたる部分のことである。ふたつの存在者に対する置き換えの場合、例えば、“ $p/a, b; x, y!q$ ”という命題においては、“ $p/a, b$ ”がマトリクスであり、これと同じようにして、n 個の置き換

えについてもマトリクスが考えられる。このマトリクスが、命題関数を再現する。さて、命題関数が持つ重要な働きは、それが、それを満たすものを要素とするクラスを定めるということである。これに対応して、置き換え理論では、各々のマトリクスがクラスを定める。例えば、1 階の命題関数（個体をドメインとする命題関数）にあたる、“ p/a ”という型のマトリクスを考えてみよう。

PoM において、ラッセルは、命題を存在者として扱う。このことは、置き換え理論においても変わらない。そこで、「ソクラテスは人間である」という命題を p とし、ソクラテスを a とすると、“ $p/a; x$ ”という表現を考えることができる。これは、「〈ソクラテスは人間である〉という命題に現れるソクラテスを、x に置き換えた結果」という確定記述であり、その結果とは、「x は人間である」という命題である。x が指示するものが、実際に人間であったとしよう。このとき、「x は人間である」という命題は真であり、x によって指示されるものは、人間というクラスに属する。こうして、“ p/a ”というマトリクスは、このとき、人間であるもののクラスを定めていると考えられる。このような考察から、次の定義が得られる (Russell, 1906a, p.172)。

$$x \in p/a = \mathrm{df}\ p/a; x.$$

クラスに対するこのような定義は、さらに、クラスのクラス、クラスのクラスのクラス、と拡張してゆくことができるし、また、（外延的な）関係についても拡張できる(2) 。

2.3　文法としてのタイプ

次に、いかにして置き換え理論が集合論のパラドクスを回避するのかを見てみよう。置き換え理論では、タイプの区別は、マトリクスに直接反映される。例えば、タイプ 1 の命題関数、すなわち、個体をドメインとするそれは、“ p/a ”というマトリクスで再現される。クラスのクラスや（個体に対する）二項関係は、“ $p/a, b$ ”という型のマトリクス、すなわち、タイプ 2 のマトリクスによって再現される(3) 。

さて、集合論のパラドクスは、自分自身を要素とするようなクラスを考えることから生じるのであった。そのようなクラス“ p/a ”を置き換え理論において考えてみよう。自分自身を要素とするということ、すなわち“ $p/a \in p/a$ ”は、2.2 での定義に従えば、次の表現と同値である。

$$p/a; p/a$$

しかし、この表現は置き換え理論の文法に反する。置き換えを表す“ $p/a; x!q$ ”という型の命題に現れることができるのは、存在者のみであった。一方、マトリクスとは、そもそも“ $p/a; x!q$ ”といった命題の一部分にすぎず、それのみでなんらかの存在者を指示するものではない。したがって、マトリクスは、上のような形で、項として命題

に現れることはできない。マトリクスは、「不完全記号」であり、「現在のフランス国王」といった表現と同じく、文脈を離れては何の意味も持たない。そして、それが項として現れる文は、いつでも、それが現れないような文へと分析可能なのである。

このようにして、置き換え理論においては、マトリクスによって再現されるような命題関数、クラス、関係、これらのすべてが、なんらかの存在者として扱われることはない。この意味で、置き換え理論とは「無クラス理論」であり、しかも、タイプ理論をアドホックでない仕方で実現するものである。というのも、置き換え理論において、タイプの階層とは、その文法によって要請されるものだからである。置き換え理論において、タイプの階層は、その文法的要請として、哲学的に正当化される。

3.　ランディニによる新たな解釈

さて、この節では、ランディニが 1998 年の著作で示した、ラッセルの数学の哲学に対する全くもって新しい解釈を紹介しよう。その解釈とは、ひとことで言えば、PoM から PM に至るまで、ラッセルは、ひとつのテーゼを一貫して保持していた、というものである。ランディニは、アーカイブに眠るラッセルの論文や草稿をもとに、置き換え理論を再構成することで、その解釈を根拠づける。

3.1　無制限変項の原理

ランディニの解釈における、ラッセルが一貫して保持していたテーゼとは、「存在するものは何であれ、一である（Whatever is, is one）」というものである[(4)]。そして、このテーゼは、「無制限変項の原理 the doctrine of the unrestricted variable」として具体化される。それは、「論理における変項は、あらゆる存在者をドメインとするのでなければならない」というものである。

まずもって、ランディニは、2 節で紹介したような、ラッセル自身の定義や公理に修正を加える形で、置き換え理論の論理体系の全貌を明らかにする。そして、その結果、置き換え理論は、実際に、集合論のパラドクスをタイプの階層によって回避しつつ、クラスの理論に必要な諸定理（例えば、クラスの外延性）をすべて証明できる、ということが示される[(5)]。そして、そのクラスの理論によって、ペアノの諸公理を満たすような自然数の定義が可能であり、置き換え理論から数学を構成することができるのである。

ところで、ラッセルは、集合論のパラドクスの解決策としてタイプを導入することを、PoM の時点で既に思いついていた (PoM, pp.523-528)。しかし、その解決策には問題があった。というのも、存在者に対してタイプの階層を与えるということは、無制

限変項の原理に反することだからである。このジレンマを解決するのが、無クラス理論である。無クラス理論において、クラスはいかなる存在者でもなく、それに対する記号は、それ単体では何の指示対象も持たない不完全記号として扱われる。したがって、クラスに対してタイプの階層を導入しようとも、それは、存在者に対してタイプの階層を導入していることにはならない。したがって、無制限変項の原理は保たれる。このような無クラス理論を実現するために、ラッセルが最初に構想した論理体系こそ置き換え理論に他ならない。

3.2　命題のパラドクス

ラッセルは、置き換え理論によって、無制限変項の原理とタイプの階層とを共存させることができた。しかし、その体系には、ある固有の問題があった。ランディニが「命題のパラドクス」と呼ぶ、3 つのパラドクスである。それは、うそつきのパラドクス、PoM の appendix B に示されていたパラドクス、“ p_o/a_o ”パラドクスと呼ばれるパラドクス、この 3 つである(6)。とりわけ“ p_o/a_o ”パラドクスは、置き換え理論にとって根本的なものだった。実際、ラッセルの 1906 年の草稿は、もっぱら、その解決に向けられているという (Landini, 1998, pp.206-212)。

これらのパラドクスに対して、ひとつの解決策を示したのが、1906 年の 6 月に書かれた“ On‘ Insolubia ’and Their Solution by Symbolic Logic ”である。この論文は、ポワンカレの批判に対する応答として仏訳され、“ Les Paradoxes de la Logique ”という名で公表された。

ランディニは、この論文を、命題のパラドクスの解決策として、量化子を含む命題（general proposition）を存在者として認めないことにしたものだ、と解釈する。実際、そこでは、量化子を含む命題はどれも、真の命題ではなく、諸々の命題に対する「不特定的な言明」にすぎないとされる (Russell, 1906b, p.207)。一方、量化子を含まない命題は、これまで通り存在者として認められる。

ランディニは、量化子を含む命題を放棄した場合、置き換え理論の体系がどのようなものになるか、シミュレーションしてみせる。そして、それにより、この場合、すべての命題のパラドクスが、実際に回避されることがわかる。しかし、その代償は大きく、置き換え理論は、もはや数学を構成できないものになってしまう。そこで導入されたのが、ランディニが「緩和公理 mitigating axiom」と呼ぶものである。その公理は、量化子を含むいかなる命題に対しても、それと同値な量化子を含まない命題が存在する、ということを保証するものである (*ibid.*, pp.211-212)。これにより、外延に関する限りで、もともとの置き換え理論と同じだけの定理が証明できるようになる。

しかし、このような解決策は結局失敗だった、とランディニは結論する (Landini, 1998, p.234)。シミュレーションの結果、緩和公理を置くとそこから、“ p_o/a_o ”パラドクスが復活してしまう、ということが明らかになったためである。

3.3　分岐置き換え理論

1908 年に発表された“ Mathematical Logic as Based on the Theory of Types ”（以下、ML）は、一般に、ラッセルが、置き換え理論に代えて、分岐タイプ理論を採用した論文だと考えられている。このような考えとは対照的に、ランディニは、ML において採用されていたのは、実は、オーダーつきの置き換え理論、すなわち、「分岐置き換え理論 ramified substitutional theory」である、と主張する。

ランディニによれば、ML は、1906 年の失敗を踏まえて、ラッセルが、命題のパラドクス、とりわけ“ p_o/a_o ”パラドクスの解決策として、オーダーの階層を置き換え理論へと導入した論文である(7)。とは言え、ML において示されているのは明らかに、分岐タイプ理論である。このことについて、ランディニは、単なる「技巧上の都合」によって、表面的に述語変項の体系が採用されているにすぎない、と説明する (Landini, 1998, p.235)。「技巧上の都合」とは、述語変項の体系の方が、置き換え理論よりも、シンプルにクラスの理論を展開できるということである(8)。

それでは、ML の時点でラッセルが考えていたという置き換え理論、すなわち、分岐置き換え理論の体系とは、いかなるものだったのか。ランディニは、ML 以前に書かれた諸草稿をもとに、その論理体系を構成してみせる。

分岐置き換え理論の体系が、それまでの体系と大きく異なる点は、次のように、置き換えを表す命題にオーダーのインデックスが現れることである。

$$\pi_m/\alpha_n;\beta_{n'}!\delta_{m'}$$

置き換えが存在者に対する操作であることはこれまでと変わらない。したがって、π、α、β、δ は、すべて存在者であり、それぞれに対して、そのオーダーを表す添え字 m、n、n'、m' が付く。そして、置き換えという操作に対して、置き換えられる存在者のオーダーと、置き換わる存在者のオーダーが同じでなければならない、という制限が加えられる。上の命題で言えば、$n = n'$ でなければならない、ということである(9)。このような制限により、例えば、個体と、量化子を含む命題との置き換えといった操作が不可能になり、“ p_o/a_o ”パラドクスを含めた、命題のパラドクスのすべてがブロックされる。

ところで、このようなオーダーつきの置き換え理論が、数学を問題なく展開できるためには、分岐タイプ理論の場合と同様に、「還元公理 axiom of reducibility」が必要

になる。例えば、タイプ1のマトリクスに対するそれは、次のように定式化される。

$*1907(\mathrm{Reduc})^1 \qquad (q_m, b_n)(\exists p_{n+1}, a_n)(p_{n+1}/a_n \equiv q_m/b_n).$

分岐置き換え理論において、還元公理は、いかなるオーダーのマトリクスに対しても、それと同値（外延が同じ）でかつ「述語的 predicative」なマトリクスが存在する、ということを保証する(10)。これによって、クラスや関係に対して、それがいかなるマトリクスで定められようとも、その外延のみから同一性を定義することができるようになる。

このように構成された分岐置き換え理論は、命題のパラドクスをオーダーの階層によってブロックしつつ、数学を展開するに必要な定理のすべてに証明を与えることができる。したがって、分岐置き換え理論は、諸々のパラドクスを回避しつつ、数学を展開するという論理主義の目標を達成できるものなのである。

しかし、分岐置き換え理論は、結局、放棄されてしまう。PM においては、もはや、それは採用されていない。ここに疑問が生じる。分岐置き換え理論は、論理主義の目標を達成するに十分なはずだからである。ランディニによれば、その答えは、無制限変項の原理にある (*ibid*., p.254)。先に見たように、分岐置き換え理論は、命題のパラドクス、とりわけ、“ p_o/a_o ”パラドクスを回避するために、存在者に直接オーダーの階層を導入する。しかし、このことは、無制限変項の原理を侵すことになる。言い換えれば、置き換え理論は、無制限変項の原理を侵すことなく、“ p_o/a_o ”パラドクスを回避することができない。この意味で、“ p_o/a_o ”パラドクスこそ、ラッセルが置き換え理論を放棄した直接の原因だったことになる。

3.4　PM の論理体系

ラッセルが一貫して無制限変項の原理を保持していたとするランディニの解釈にとって、最大の山場となるのは、PM である。というのも、PM においては、無制限変項の原理は、もはや放棄されているように見えるからである。実際、PM は、もっぱらそのように解釈されてきた。そこで示された分岐タイプ理論は、述語変項に対して、タイプとオーダーの階層を与える。このことは、変項に制限を与えることに他ならないと思われる。ランディニの説明を見よう。

3.3 で見たように、ランディニの解釈によれば、ML で実は展開されていたところの分岐置き換え理論は、無制限変項の原理を侵すがゆえに、PM では放棄されてしまったのだった。そうだとすれば、それに代わって PM で提示された論理体系が、その原理を侵すものだとは考えにくい(11)。というのも、その原理を放棄するならば、分岐置き換え理論によって、ラッセルの目標は完全に果たされるからである。

それでは、いかにして、PM で示された分岐タイプ理論の体系が無制限変項の原理を保持している、と言えるのだろうか。ランディニは、命題関数に対する唯名論的解釈を採ることで、この問いに答える。

まずもって、PM の述語変項の体系において、存在者としての命題は放棄されている、ということが確認される(12)。PM では、これまで存在者として見なされてきた命題もまた、不完全記号とされる（PM, p.44)。ここまでは、PM に対する一般的な解釈と変わらない。しかし、ランディニは、さらに、命題関数もまた存在者としては考えられていないとする。PM において、命題は存在者ではない。すると、「変項になんらかの値が割り当てられれば、ただちに、命題を表現する」(*ibid*., p.38) ところの命題関数もまた存在者ではない、と確かに考えられる。ランディニによれば、PM における命題関数とは、「開いた論理式 an open wff」に過ぎず、言語表現を離れて存在するような、なんらかの存在者ではない (Landini, 1998, p.277)。そして、命題関数に対する変項（述語変項）は、「論理式に対する代理的な図式文字 dummy schematic letters for wffs」だとされる (*ibid*., p.278)。

このように、命題関数を唯名論的に解釈することによって、タイプとオーダーの階層に、哲学的な正当化が与えられる(13)。ランディニによれば、述語変項に与えられるタイプの区分は、それが項として現れる文が、論理式（well-formed formula）として認められるための構文論的な条件に他ならない。一方、オーダーを正当化するのは、「真」や「偽」という概念に対する階層的な定義である。PM では、「真」や「偽」という概念の意味は、それが割り当てられる命題に現れる量化子の構造に応じて、階層的に与えられる（PM, pp.42-43)。オーダーとは、論理式が、この階層的な意味を反映した真理値を持つための条件、要するに、論理式の真理条件である。オーダーの階層は、述語変項それ自身が持つ意味論的な制約として正当化される。

ランディニによれば、PM における真の変項とは、個体変項である。個体変項の値域は、存在者を指示する表現すべてである。それは、論理式に対する図式文字である述語変項とは、本質的に異なるものである(14)。そして、真の変項である、個体変項のドメインには、なんら制限は与えられていない。こうして、PM においても、無制限変項の原理は保持されていた、と言えるのである。

4.　ランディニによる解釈の検討

さて、この節では、3 節で見たランディニの解釈を検討することにしよう。その解釈を構成する諸々の主張は、その大小さまざまな点でセンセーショナルなものだった。それらの多くが、従来のラッセル解釈と相反するものだったからである(15)。中でも、

PM に対する解釈は、とりわけ議論を喚起するものである。本稿では、その解釈を支えるところの、命題関数に対する唯名論的解釈の妥当性を検討する。

4.1　テキストとの整合性

まずは、命題関数に対する唯名論的解釈と、テキストとの整合性を検討しよう。PM に見られる表現に対しては、ランディニの解釈と従来の解釈、そのどちらも整合的である。そこで、手がかりになりそうなのは、PM の後に書かれた諸論文である。

ランディニは、その解釈の根拠づけとして、PM の後に書かれた、いくつかのラッセルの記述を挙げる(16)。これらを見ると、その解釈はかなりの妥当性を帯びてくる。例えば、次のような記述がある。

> 命題関数それ自体は、単なる図式（schema）、単なる見せかけ（shell）、意味に対する容器（receptacle for meaning）であって、もともと何らかの意味を持つものではない。(Russell, 1919, p.157)

しかし、ここでひとつ注意しなければならないことがある。ランディニが挙げる、唯名論的解釈を支えるラッセルの記述は、どれもウィトゲンシュタインとの交流が始まった後に発表されたものだということである。ウィトゲンシュタインは、ランディニ自身も認めるように、論理を、なんらかの対象について語るものではなく、言語表現に尽きるものとして見なしたのだった (Landini, 1998, p.295)。命題関数に対する唯名論的な捉え方は、PM の後になって得られたものかもしれないのである(17)。

さらに、ラッセルの PM の後に書かれた記述には、唯名論的な捉え方は採用されていなかった、ということを示唆するものが存在する(18)。次の表現を見てほしい。

> 私の定義は、間違っていた。というのも、私は、記号についてではなく、存在者についての、タイプの区別を考えていたからである。(Russell, 1944, p.691)

こういった記述の存在は、命題関数に対する唯名論的な捉え方が、PM の後になって得られたものだということの明らかな証拠に思われる。

こうして、PM 以後のラッセルの記述を見る限り、次のように考えることが妥当だろう。すなわち、ラッセルは、確かに命題関数に対する唯名論的な捉え方を持っていたようだが、それは、PM の後になってからのことである、と考えることである。ラ

ンディニの解釈を根拠づけるには、PMにおいて命題関数が唯名論的に捉えられていた、とわかる記述が必要である。

4.2　存在論的前提との整合性

次に、命題関数の唯名論的解釈と、PM に見られる存在論的な前提との整合性を検討しよう。唯名論的解釈が不整合をきたすのは、PM における、普遍物（universal）の扱いを考えるときである。普遍物とは、例えば、「黄色」のような感覚的性質だと思えばよい。

ラッセルは、普遍物を存在者として扱う。ランディニは、このことを認め、普遍物を個体変項の値域に含めることで説明する (Landini, 1998, p.292)。また、普遍物とは、命題に主語として現れるのみでなく、述語としても現れるものである。このことについても、ランディニは同意する (*ibid*., p.277)。それでは、普遍物が述語として現れる場合とはどのような場合だろうか。ふつう考えられるのは、次のような表現である。

$$x \text{ is yellow.}$$

この表現において、個体変項 x が主語として、普遍物「黄色」が述語として、それぞれ現れている、と考えられよう。実際、PM の頃のラッセルも、そのように考えている (Russell, 1911, p.111)。しかし、命題関数の唯名論的解釈では、そのように考えることはできない。上のような表現は、ひとつの命題関数と見なせるが、唯名論的解釈によれば、それは、単なる開いた論理式であって、存在者を指示する表現ではないからである。

このように見ると、命題関数の唯名論的解釈は、普遍物の存在論と相容れないもののように思われる。ランディニの解釈にとって、このことは説明されるべきことである。しかし、ランディニは、とくにその説明を与えてはいない。

5.　おわりに

ランディニは、置き換え理論の再構成をもとに、PM に対する唯名論的解釈を示した。その解釈は、タイプとオーダーの階層に哲学的な正当化を与え、PM に対する諸々の批判に応答できるものである。とは言え、その解釈には、本稿で検討したような、いくつかの困難がある。これらの困難が解消されない限り、命題関数を唯名論的に解釈することで、分岐タイプ理論をそれに対する批判から救う、というランディニのアプローチは、妥当なものとは言えないだろう。

ところで、2 節で見たように、置き換え理論は、アドホックでない仕方で無クラス理論を実現できるものだった。ランディニは、もし、置き換え理論に、“ p_o/a_o ”パラ

ドクスに対する、無制限変項の原理と矛盾しないような解決が与えられるならば、それは、ラッセルにとって理想的な論理体系となる、と考える。ラッセルの数学の哲学に対する研究において、置き換え理論は、本稿で検討したような解釈上の重要性のみでなく、その論理主義という試みを救う可能性をも持つものとして、位置づけられる。

註

＊822.110.ryo@gmail.com

(1) PoM におけるラッセルにとって、存在者（entity）、個体（individual）、項（term）、論理的主語（logical subject）といったタームはすべて同義である（PoM, pp.43-44）。このことは、PoM の考え方が直接反映されている置き換え理論の体系においても変わらない。

(2) 厳密に言えば、これはクラスの定義ではない。マトリクス“ p/a ”は、そのままクラスを表す記号として用いるには不十分だからである (Landini, 1998, pp.149-150)。ランディニによる再構成では、（個体の）クラスを表す記号は、次のように定義される。

df(C)[1] $x \in \imath(p/a)[p/a \approx_z Az] = \mathrm{df}\ (\exists pa)[p/a \approx_z Az\ .\&.\ x \in p/a]$.

（この定義における“ $\approx_z$ ”は、変項 z について外延が同じであるということを意味する。）

(3) 置き換え理論では、一般に、n 項関係は、n 階のクラスと同じタイプになる。このことは若干奇妙にも思われるが、ランディニはそれを問題視しない (Landini, 1998, pp.142-143)。

(4) PoM (p.132) や Russell (1906a, p.189) に、“ Whatever is, is one ”という表現は見られる。このテーゼは、「存在の一義性 the univocity of being」と呼ばれる (Landini, 1989; 戸田山, 2003)。

(5) ただし、置き換えによって与えられるクラスでは、その共通部分や和集合、補集合、シングルトンについて、これらをふつうの集合論と平行する形で定義することはできない (Landini, 1998, pp.162-165)。

(6) 簡単に言えば、appendix B のパラドクスも“ p_o/a_o ”パラドクスも、べき集合の定理から導かれるものである。前者は、命題と命題のクラスとを、後者は、存在者のペア（マトリクス）と存在者のクラスとを、それぞれ一対一対応させることに起因する。“ p_o/a_o ”パラドクスについては、Byrd (2000)、Linsky (2002-2003) や戸田山 (2003) が参考になる。

(7) このことから、オーダーの階層は、「ベリーのパラドクス」などの、いわゆる「意味論的パラドクス」を回避するために導入されたのではない、ということになる。

(8) 置き換え理論では、つぎのふたつの問題がある。ひとつは、クラス記号が煩雑になるということであり、もうひとつは、クラスの和集合・共通部分などがシンプルな仕方で定義できないということである。註 (2) 、(5) を参照されたい。

(9) これ以上のオーダーの制限（例えば、“ $m \geq n$ ”）を置くことは、分岐置き換え理論によるクラスの構成を困難にする (Landini, 1998, pp.235-240)。

(10) 述語的なマトリクスとは、“ / ”の前に現れる存在者のオーダーが、“ / ”の後ろに現れる存在者のオーダー（のうち最大のもの）よりも、ひとつだけ大きいようなマトリクスのことである。例えば、“ p_1/a_0 ”や“ $p_2/a_0, b_1, c_0$ ”がそれである。

(11) PM で分岐置き換え理論が放棄された理由として、その体系よりも述語変項の体系の方が、クラスの理論を構成するに適している、ということも考えられる（註 (2) 、(5) 参照）。しかし、ランディニは、「このことは、十分な理由ではない」とする (Landini, 1998, p.274)。

(12) ラッセルは、真理の対応説を取る。判断が正しいとは、それを行なう者の心（mind）と、事実としての命題との間に対応（correspondence）が見られることである。PM では、判断とは、心と諸々の存在者との多項関係であるとされ、それゆえ命題は単一の存在者（a single entity）ではなくなる（PM, p.44）。このような考えは、現在、「判断の多重関係理論 multiple-relation theory of judgement」と呼ばれている。

(13) ランディニは、「悪循環原理 vicious circle principle」は、実は、これらの階層を正当化する

役割を果たすものでない、と考える。その解釈によれば、それは、唯名論的に捉えられた命題関数に対する条件が満たされる結果、妥当になるものにすぎない (Landini, 1998, pp.275-279)。
(14) 両者のこの違いは、それぞれに対する量化子の違いとして捉えられる。詳しくは、戸田山 (2003) や Stevens (2003) を参照されたい。
(15) 例えば、還元公理の扱いもそのひとつである。ランディニによれば、PM の述語変項は、すべて述語的（predicative）であって、還元公理が置かれるのは、それが PM における包括原理だからである (Landini, 1998, p.267)。オーダーが導入された理由（註 (7) ）や悪循環原理の位置づけ（註 (13) ）についても議論の余地がある。詳しくは、Stevens (2003) を参照されたい。
(16) 本稿で引用したもの以外に、ランディニが挙げるのは、次の箇所である: Russell (1912, p.3)/ Russell (1959, pp.62, 92)。ただし、Russell (1959) に関しては、ランディニが指定する箇所は誤りであると思われる。それらしき表現は、他の箇所に見つけられる (Russell, 1959, p.82)。
(17) Stevens (2003) もほぼ同様の指摘をしている。
(18) このことは、Grattan-Guinness (2000, p.398) が指摘している。

文献

Byrd, M. (2000). ‘Review, Gregory Landini: *Russell’s Hidden Substitutional Theory*,’ *The British Journal for the Philosophy of Science*, *51*, 357-362.

Grattan-Guinness, I. (2000). *The Seach for Mathematical Roots 1870-1940; Logics, Set Theories, and the Foundations of Mathematics from Cantor through Russell to Gödel*, Princeton: Princeton University Press.

Landini, G. (1989). ‘New Evidence Concerning Russell’s Substitutional Theory of Classes,’ *Russell*, *9*, 26-42.

——— (1998). *Russell’s Hidden Substitutional Theory*, Oxford: Oxford University Press.

Linsky, B. (2002-2003). ‘The Substitutional Paradox in Russell’s 1907 Letter to Hawtrey,’ *Russell*, *22*, 151-160.

Russell, B. & Whitehead, A. N. (1910-1913). *Principia Mathematica*, Cambridge: Cambridge University Press.

Russell, B. (1903). *The Principles of Mathematics*, London: Routledge.

——— (1906a). ‘On the Substitutional Theory of Classes and Relations,’ in Lackey, D. ed. *Essays in Analysis*, 165-189.

——— (1906b). ‘On’Insobulia’and Their Solution by Symbolic Logic,’ in Lackey, D. ed. *Essays in Analysis*, 190-214.

——— (1911). ‘Knowledge by Acquaintance and Knowledge by Description,’ *Proceedings of the Aristotelian Society*, *11*, 108-128.

——— (1912). ‘On the Notion of Cause,’ *Proceedings of the Aristotelian Society*, *13*, 1-26.

——— (1919). *Introduction to Mathematical Philosophy*, London: George Allen & Unwin.

——— (1944). ‘Reply to Criticisms,’ in Schlipp, P. A. ed. *The Philosophy of Bertrand Russell*, 679-739.

——— (1959). *My Philosophical Development*, London: George Allen & Unwin.

Stevens, G. (2003). ‘Substitution and the Theory of Types [review of Gregory Landini, *Russell’s Hidden Substitutional Theory*],’ *Russell*, *23*, 161-176.

戸田山和久 (2003). 「置き換え理論、そしてラッセルの数学の哲学についてまだわかっていないこと」,『科学哲学』, 第 36-2 号, 1-20 頁.

〔京都大学大学院修士課程・哲学〕