

# 不連続変形法 (DDA) における数値減衰特性 に関する研究

小山 倫史<sup>1</sup>・布川 哲也<sup>2</sup>・西山 哲<sup>3</sup>・大西 有三<sup>4</sup>

<sup>1</sup>正会員 京都大学大学院助教 工学研究科都市環境工学専攻 (〒615-8540 京都市西京区京都大学桂4)  
E-mail: koyama@geotech.kuciv.kyoto-u.ac.jp

<sup>2</sup>正会員 大成建設株式会社 横浜支店 (〒220-0012 横浜市西区みなとみらい3-6-3)  
E-mail: hkwtty00@pub.taisei.co.jp

<sup>3</sup>正会員 京都大学大学院准教授 工学研究科都市環境工学専攻 (〒615-8540 京都市西京区京都大学桂4)  
E-mail: nisiyama@geotech.kuciv.kyoto-u.ac.jp

<sup>4</sup>正会員 京都大学副学長・理事 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)  
E-mail: ohnishi@geotech.kuciv.kyoto-u.ac.jp

不連続変形法(DDA)において、ブロック間の接触時にはブロックの貫入が生じないように接触ばねが導入される。この際、個別要素法 (DEM) と違い、ダッシュポットによるエネルギーの減衰は生じないが、数値積分法に起因した数値減衰が生じる。本論文では、DDAの接触時の挙動をシンプルに表現した1次元の自由振動問題を例に挙げ、ニューマークβ法による数値減衰特性の評価方法をまとめ、DDAによる衝突時の数値減衰特性評価について整理した。また、3次元剛体球DDAを用いて1次元場での衝突解析を行い数値減衰の評価を行った。その際、ニューマークβ法のパラメータについて感度解析を行い、DDA解析による衝突解析時の数値減衰特性と解の安定性および解析精度に与える影響を評価した。

**Key Words :** *discontinuous deformation analysis (DDA), numerical damping, Newmark β method, 1-D oscillation problem*

## 1. はじめに

不連続変形法<sup>1), 2)</sup> (Discontinuous Deformation Analysis: DDA) では、剛体あるいは弾性体ブロック同士で接触が生じたとき、ブロックの貫入が生じないように接触ばね (あるいは、ペナルティーばね) が導入される。接触の状況を1次元で表すと図-1のように表わされ、この系には個別要素法 (Distinct Element Method: DEM) で用いられるようなダッシュポット (ダンパー) によるエネルギーの減衰はない。しかし、DDAでは、接触時に数値積分法に起因する数値減衰<sup>3), 4), 5), 6)</sup>が生じることが知られている。DDAを用いた落石解析では、速度エネルギー比により衝突時のエネルギー損失を評価するが、数値減衰が生じることにより、解析精度に影響を与える可能性がある。このような状況において、解析精度を確保するためには、速度エネルギー比による衝突時のエネルギー損失と、数値減衰の影響を分離して評価することが重要と

なる。このようなことから、Wu<sup>7)</sup>、あるいは石川ら<sup>8)</sup>は衝突時の数値減衰に起因するエネルギーの減衰について検討を行い、時間増分や、ペナルティーばね剛性の値が数値減衰に影響を与えることを報告している。しかし、ニューマークβ法が衝突挙動に与える影響を定量的に評価する手法については、十分に議論されていない。また、ブロック間の摩擦を取り扱う問題に対しては、解析精度についての検討がなされているが<sup>9), 9)</sup>、衝突挙動解析において、解析精度に影響を与えるパラメータを評価したものはこれまでに報告されていない。

よって、本論文では、DDAの接触時の挙動をシンプルに表現した1次元自由振動問題を例に挙げ、ニューマークβ法による数値減衰特性評価方法をまとめ、DDAによる衝突時の数値減衰特性評価法について整理を行った。また、3次元剛体球DDAを用いて1次元場での衝突解析を行い数値減衰の評価を行った。その際、従来より用いられているニューマークβ法のパラメータ (すなわち、

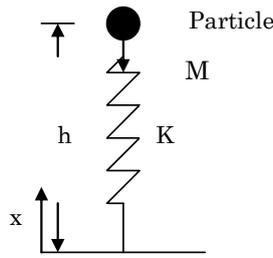


図-1 DDAにおける1次元場での接触モデル

$\beta=0.5, \gamma=1.0$ ) における衝突時の減衰状態を示し、その後、ニューマーク $\beta$ 法のパラメータについて感度解析を行い、DDA解析による衝突解析時の数値減衰特性と解の安定性および解析精度に与える影響を評価した。

## 2. ニューマークの $\beta$ 法の特性評価法

### (1) 運動方程式とニューマークの $\beta$ 法<sup>5)</sup>

DDAは、式(1)に示すHamiltonの原理による接触を含む運動方程式をポテンシャルエネルギー最小化原理により釣合い方程式を求めて定式化を行う。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{D}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{D}} + \mathbf{K}\mathbf{D} = \mathbf{F} \quad (1)$$

ここに、 $\mathbf{M}$ : 質量マトリックス、 $\mathbf{C}$ : 減衰マトリックス、 $\mathbf{K}$ : 剛性マトリックス、 $\mathbf{F}$ : 外力ベクトル、 $\dot{\mathbf{D}}$ : ブロック重心の加速度ベクトル、 $\dot{\mathbf{D}}$ : ブロック重心の速度ベクトル、 $\mathbf{D}$ : ブロック重心の変位ベクトルである。

運動方程式(1)において、時刻 $t_n$ での変位 $D_n$ 、速度 $\dot{D}_n$ 、加速度 $\ddot{D}_n$ は既知であるとし、時刻 $t_{n+1}$ における $D_{n+1}$ 、 $\dot{D}_{n+1}$ 、 $\ddot{D}_{n+1}$ を求める手順を示す。時刻 $t_{n+1}$ における運動方程式は、

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{D}}_{n+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{D}}_{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{D}_{n+1} &= \mathbf{F}_{n+1}, \\ \mathbf{D}(0) &= \mathbf{0} \quad \dot{\mathbf{D}}(0) = \dot{\mathbf{D}}_0 \end{aligned} \quad (2)$$

と表される。また、ニューマーク $\beta$ 法では、変位と速度を次のように時間に関して離散化を行う。

$$D_{n+1} = D_n + \Delta t_n \dot{D}_n + \frac{\Delta t_n^2}{2} (1-2\beta) \ddot{D}_n + \Delta t_n^2 2\beta \ddot{D}_{n+1} \quad (3)$$

$$\dot{D}_{n+1} = \dot{D}_n + \Delta t_n (1-\gamma) \ddot{D}_n + \Delta t_n \gamma \ddot{D}_{n+1} \quad (4)$$

ただし、FEMのように各節点における局所座標系での変位を更新する手法とは異なり、DDAではブロックシステム全体で共通の全体座標系を用いて、重心の変位を段階的に足し合わせるため、初期変位はすべてのタイムス

テップで $D_n=0$ となる<sup>5)</sup>。式(3)および式(4)より、

$$\ddot{D}_{n+1} = \frac{D_{n+1} - \Delta t_n \dot{D}_n - \frac{1}{2} \Delta t_n^2 (1-2\beta) \ddot{D}_n}{\beta \Delta t_n^2} \quad (5)$$

$$\dot{D}_{n+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t_n} D_{n+1} + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \dot{D}_n + \frac{2\beta - \gamma}{2\beta} \Delta t_n \ddot{D}_n \quad (6)$$

と表される。運動方程式(2)に、式(5)、(6)を代入すると

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\beta \Delta t_n^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t_n} \mathbf{C} + \mathbf{K} \right) \mathbf{D}_{n+1} \\ = \mathbf{F}_{n+1} + \frac{1}{\beta \Delta t_n} \{ \mathbf{M} - (\beta - \gamma) \Delta t_n \mathbf{C} \} \dot{\mathbf{D}}_n \\ + \frac{1}{2\beta} \{ (1-2\beta) \mathbf{M} - (2\beta - \gamma) \Delta t_n \mathbf{C} \} \ddot{\mathbf{D}}_n \end{aligned} \quad (7)$$

となる。ダンパーによる減衰のない系では、

$$\left( \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t_n^2} + \mathbf{K} \right) \mathbf{D}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t_n} \dot{\mathbf{D}}_n + \frac{(1-2\beta) \mathbf{M}}{2\beta} \ddot{\mathbf{D}}_n \quad (8)$$

と表される。左辺および右辺を整理することにより、DDAでは以下のような全体剛性方程式で表される。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & & & \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \mathbf{K}_{n1} & \mathbf{K}_{n2} & \cdots & \mathbf{K}_{nn} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} \quad (9)$$

時間ステップ毎の変位は、この連立方程式を解くことで得られる。得られた変位に基づき、式(5)および式(6)を用いて次の時間ステップ計算における初期速度、初期加速度を更新する。通常 DDA では、 $\beta=0.5, \gamma=1.0$  を用いており、このとき式(5)、(6)および式(8)より、

$$\ddot{D}_{n+1} = \frac{2}{\Delta t_n^2} D_{n+1} - \frac{2}{\Delta t_n} \dot{D}_n \quad (10)$$

$$\dot{D}_{n+1} = \frac{2}{\Delta t_n} D_{n+1} - \dot{D}_n \quad (11)$$

$$\left( \frac{2\mathbf{M}}{\Delta t_n^2} + \mathbf{K} \right) \mathbf{D}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} + \frac{2\mathbf{M}}{\Delta t_n} \dot{\mathbf{D}}_n \quad (12)$$

となる。この場合、ステップ計算終了後の速度・加速度の計算にステップ計算初期の加速度を必要としないため、

加速度を更新することなく、計算を行うことが可能である。

(2) ニューマークのβ法の特性評価法<sup>10,11)</sup>

DDAにおける接触の状況を1次元場で表すと、図-1のように表される。そのため、本節では、式(1)と同じ運動方程式で表される1次元の振動解析の系を考え、ニューマークβ法の特性評価を行うための手法をまとめる。まず、運動方程式(1)を以下の形式に変形する。

$$\ddot{D} + 2\zeta\omega\dot{D} + \omega^2 D = f \quad (13)$$

ここで、 $\zeta$  : 減衰係数、 $\omega$  : 系の固有振動数であり  $\omega = \sqrt{K/M}$ 、 $f = F/M$  となる。  
ダンパーによる減衰のない系を考えるため、

$$\ddot{D} + \omega^2 D = f \quad (14)$$

となる。この方程式を初期条件、 $D(0) = D_0$  および  $\dot{D}(0) = \dot{D}_0$  のもとで解く。ニューマークβ法を用いて時間空間の離散化を行うと、

$$\ddot{D}_{n+1} + \omega^2 D_{n+1} = f_{n+1} \quad (15)$$

$$D_{n+1} = D_n + \Delta t_n \dot{D}_n + \frac{\Delta t_n^2}{2} (1-2\beta) \ddot{D}_n + \Delta t_n^2 2\beta \ddot{D}_{n+1} \quad (16)$$

$$\dot{D}_{n+1} = \dot{D}_n + \Delta t_n (1-\gamma) \ddot{D}_n + \Delta t_n \gamma \ddot{D}_{n+1} \quad (17)$$

$$D_0 = D_0 \quad \dot{D}_0 = \dot{D}_0 \quad (18)$$

と表される。続いて、式(15), (16), (17)から加速度項  $\ddot{D}_n, \ddot{D}_{n+1}$  を消去して以下のような形式で表す。

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n + \mathbf{L}_n \quad (19)$$

ここに、 $\mathbf{A}$ は推移マトリックス(amplification matrix)、 $\mathbf{L}_n$ は荷重ベクトル(load vector)であり、次式のように表される。

$$\mathbf{x}_n = \begin{Bmatrix} D_n \\ \dot{D}_n \end{Bmatrix} \quad (20)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{A}_2 \quad (21)$$

$$\mathbf{L}_n = \mathbf{A}_1^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\Delta t^2}{2} [(1-2\beta)f_n + 2\beta f_{n+1}] \\ \Delta t [(1-\gamma)f_n + \gamma f_{n+1}] \end{Bmatrix} \quad (22)$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 + \Delta t^2 \beta \omega^2 & 0 \\ \Delta t \gamma \omega^2 & 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\Delta t^2}{2} (1-2\beta) \omega^2 & \Delta t \\ -\Delta t (1-\gamma) \omega^2 & 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

続いて、次式で表される特性方程式の解を求める。

$$\det(\mathbf{A} - z\mathbf{I}) = z^2 - 2A_1 z + A_2 = 0 \quad (25)$$

ただし、 $A_1, A_2$ は次式で表されるスカラー量である。

$$A_1 = \frac{1}{2} \text{trace} \mathbf{A} = \frac{1}{2} (A_{11} + A_{22}) = 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega^2 \Delta t^2 (\gamma + \frac{1}{2})}{1 + \beta \omega^2 \Delta t^2} \quad (26)$$

$$A_2 = \det \mathbf{A} = A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21} = 1 - \frac{\omega^2 \Delta t^2 (\gamma - \frac{1}{2})}{1 + \beta \omega^2 \Delta t^2} \quad (27)$$

これを、 $z$ について解き、特性根を求めると、

$$z = A_1 \pm \sqrt{A_1^2 - A_2} \quad (28)$$

となり、この式により、ニューマーク型の数値積分特性を評価することになる。

現在、DDAで用いられている $\beta=0.5, \gamma=1.0$ を代入すると、

$$z_{1,2} = \frac{4 - \omega^2 \Delta t^2 \pm \sqrt{\omega^2 \Delta t^2 (\omega^2 \Delta t^2 - 16)}}{4(1 + 0.5\omega^2 \Delta t^2)} \quad (29)$$

となる。

数値解の安定性を議論する際、特性根の中で絶対値が最大の解が、数値解の安定性を支配し、

$$\rho = \max_k |z_k| \quad (k \text{は全ての固有値}) \quad (30)$$

で定義されるスペクトル半径が用いられることが多い。ただし、本節では、DDA解析での数値積分特性を評価することを目的としているため、特性根から得られるニューマークβ法を用いた場合の数値計算上の減衰係数、固有周期を用いて特性評価を行う。

数値計算上の減衰係数 $\zeta'$ は、

$$\lambda' = \frac{\ln(z_k)}{\Delta t}, \quad \omega' = |\lambda'|, \quad \zeta' = -\frac{\text{Re}(\lambda')}{|\lambda'|} \quad (31)$$

と表される。減衰係数の誤差は、

$$\Delta \zeta \equiv \zeta' - \zeta \quad (32)$$

として表される。ただし減衰のない系においては、 $\zeta = 0$  である。また、式(31)で得られた固有振動数から、固有周期が求められ、

$$T' = \frac{2\pi}{\omega'} \quad (33)$$

と表される。なお、ここで用いた $\omega$ ,  $\zeta$ の表記は式(13)中に表されているものに対応し、それぞれの記号に付記した「'」は数値解における値であることを意味する。また、図-2a)に表されるように振幅が減少する割合は一定であり、対数減衰率 $\delta$ は、

$$\begin{aligned} \delta &= \ln \frac{x_2}{x_1} = \ln \frac{Ae^{-\zeta'\omega'(t_1+T')}}{Ae^{-\zeta'\omega't_1}} \\ &= -\zeta'\omega'T' = -2\pi\zeta' \end{aligned} \quad (34)$$

で表される。さらに、振動一周期でのエネルギーの対数減衰率は

$$\ln \frac{E_2}{E_1} = \ln \frac{\frac{1}{2}kx_2^2}{\frac{1}{2}kx_1^2} = 2 \ln \left( \frac{x_2}{x_1} \right) = 2\delta \quad (35)$$

となり、

$$\frac{E_2}{E_1} = e^{2\delta} = e^{-2\pi\zeta'} \quad (36)$$

で表される。比較のために図-2b)には減衰がない系の一次元振動問題の厳密解を示す。

### (3) DDAにおける衝突解析時の特性評価法

DDAでは、ニューマーク $\beta$ 法において、 $\beta=0.5$ ,  $\gamma=1.0$ という値が用いられている。このときの数値解の特性を以下に示す。数値解の特性は時間増分 $\Delta t$ そのものではなく、 $\Delta t$ と固有値 $\lambda$ の積 $\lambda\Delta t$ で決まる。減衰の小さい系では、固有振動数と時間増分の積 $\omega\Delta t$ に比例する。

$\omega\Delta t = 2\pi\Delta t / T$  であるので、 $\Delta t/T$ が安定性や精度を評価するうえで重要になる。 $\Delta t/T$ は、 $\frac{\Delta t}{T} = \frac{\Delta t}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{M}}$  ( $\Delta t$ : 時間増分,  $K$ : バネ剛性,  $M$ : 質量) と表されるため、

時間増分のみではなく、バネ剛性および質量が安定性や精度に影響を与えることになる。ここでは、 $\Delta t/T$ に対する減衰係数誤差およびDDAを用いて衝突解析を行う場合のエネルギーの減衰の割合をまとめる。図-3a)は、 $\Delta t/T$ に対する減衰係数の誤差を示す。また、衝突前後の物体のエネルギーの比 (以下 $E_2/E_1$ とする) を以下に示す方法により評価する。ただし、 $E_1$ と $E_2$ はそれぞれ衝突前、衝突後の球体の持つエネルギーを表す。DDAによる落石解析では、1つのブロックが別のブロックに衝突し、ペナルティーばねにより物体が押し戻され再び跳躍するまでに、ペナルティーばねが1周期分の振動が生じる。このため、数値解に1周期でどの程度の数値減衰が生じるかを把握する必要がある。そこで、式(36)を用いてニューマーク $\beta$ 法 ( $\beta=0.5$ ,  $\gamma=1.0$ ) を用いた場合の、 $\Delta t/T$ に対する $E_2/E_1$ を用いて、数値減衰を評価する。図-3b)に $\Delta t/T$ に対する $E_2/E_1$ の変化の様子を示す。式(29)の固有値が虚数から実数へ変化しているために途中で線が分岐する。また、安定性は式(30)のように特性根の絶対値の最大値を用いて評価するため、本図では、特性根の最大のもを実線で表示している。 $\Delta t/T$ は、時間増分、もしくはペナルティーばね剛性が大きくなる場合、横軸右方向に移動し、また質量が大きくなる場合、横軸左側へ移動する。これらの図より、 $\Delta t/T$ に対する減衰誤差および $E_2/E_1$ を評価することが可能である。

これらに加え、数値積分法の特性を評価するために、解析の精度を考慮する必要がある。FEMなどで行われる動的振動問題においては周波数応答を捉えられるかが重

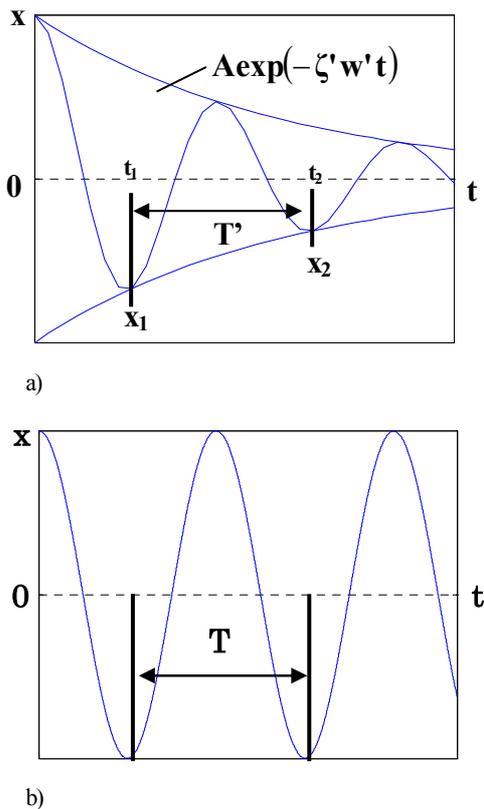


図-2 振動問題の a) 数値解と b) 厳密解 (減衰がない場合)。  
横軸は時間、縦軸は式(20)で示したベクトル。

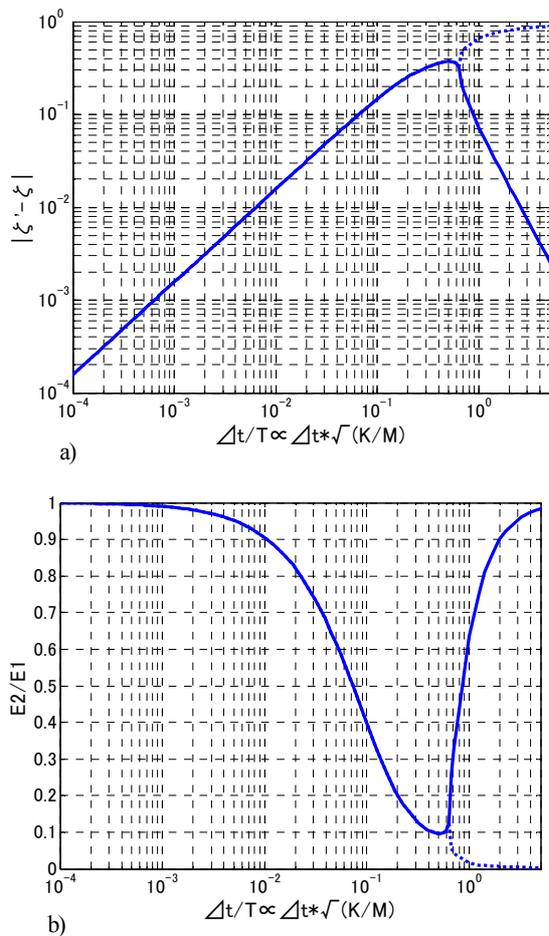


図-3 ニューマークβ法の数値減衰特性, a)  $\Delta t/T$  に対する減衰係数のずれ, b)  $\Delta t/T$  に対する  $E_2/E_1$  の変化

要となる。このため、ニューマークβ法などの数値積分法にとって適切な時間増分の検討が行われてきており、ニューマークβ法では、 $\Delta t/T < 0.05$ 、すなわち一周期に対して20点以上の刻みをとることが推奨されている<sup>10)</sup>。DDAによる衝突解析においても、この1周期に対する刻みの個数が影響する可能性がある。DDAにおける数値減衰特性を評価し、ペナルティーばね剛性及び時間増分が解析精度に与える影響を検討する。

### 3. 剛体球DDAにおける衝突時の特性評価

前節に示した手法により、剛体球DDAの衝突時の数値減衰の評価および解析精度の検討を行う。剛体球を用いることにより、ブロック内部のひずみエネルギーは無視することができ、ニューマークβ法により生じる数値減衰のみの影響を評価することができる。

図-4に、剛体球DDAでの解析結果の一例を示す。図-4a)は剛体球DDAで衝突前後の剛体球の持つエネルギーの比を評価するためのモデルである。水平に置かれた壁要素(平面要素)に向け剛体球を自由落下させ、図-4b)に

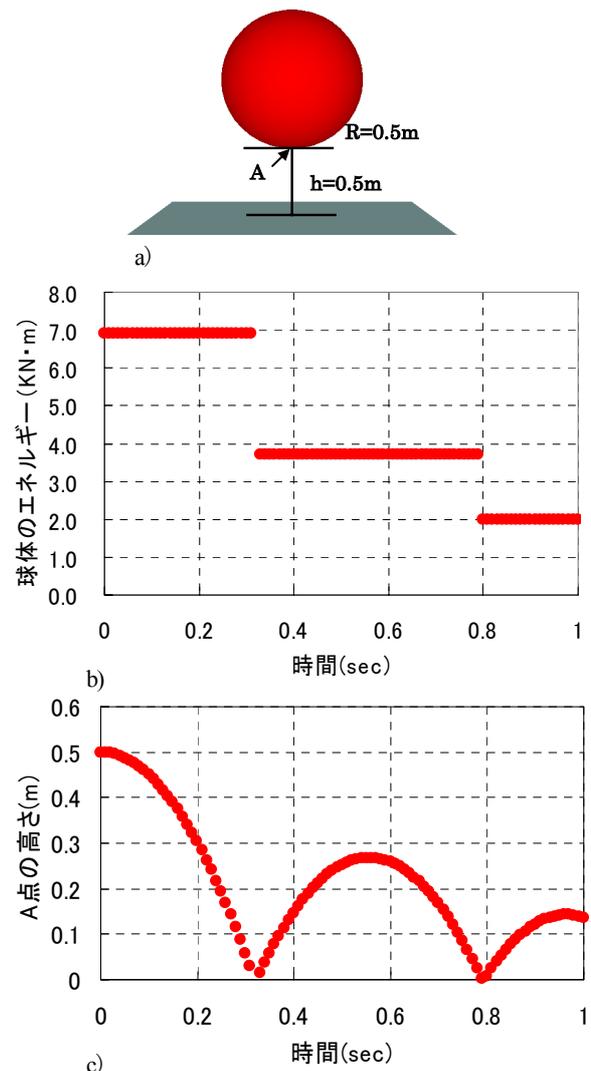


図-4 解析モデルおよび数値減衰の例, a) 解析モデル, b) 衝突前後の球体のエネルギー, c) A点の高さの経時変化

示すように、衝突前後で剛体球のエネルギーの変化から数値減衰の影響を評価する。ただし、剛体球のエネルギーのうち、位置エネルギーは剛体球と壁要素が接触する時の剛体球重心座標を原点として計算を行った。また、この解析において数値減衰のみの影響を評価するため、特に断りがない限り、速度エネルギー比=1.0とした。図-4c)は、剛体球下端の高さを時系列で表したものであり、数値減衰により、衝突後の最高点の高さが変化する様子を示したものである。

#### (1) 通常のDDAによる解析 ( $\beta=0.5, \gamma=1.0$ の場合)

現在DDAで用いられているニューマークβ法における、 $\beta=0.5, \gamma=1.0$ とした時の減衰特性を定量的に評価した研究はこれまでにあまり行われていない。以下に従来より用いられているこれらのニューマークβ法のパラメータの値を用いて、剛体球DDAの減衰特性について述べる。

また、解析の安定性の観点から、現在のペナルティーばねの設定法の問題点を指摘する。

**a) 質量および時間増分が衝突時の減衰に与える影響**

表-1は、ペナルティーばね剛性を一定として、剛体球半径を0.1m, 0.25m, 0.5m, 1.0mと変化させたとき $\Delta t/T$ の変化の様子を示している。図-5に、これらの条件での解析から得られた数値減衰の様子を示す。この際、半径以外の物性値は共通であり、剛体球の質量のみを変化させた。ただし、半径が0.1mの場合、大きい時間増分を使用すると許容変位比の影響を受け、衝突前に時間増分が小さくなるため、半径が0.1mの場合のみ $10^3\text{sec}$ 以上の刻み幅は使用していないことに注意する。また、 $\Delta t/T$ が約0.637より大きい値の時には、式(29)の固有値が虚数から実数へ変化するため、ニューマーク $\beta$ 法 ( $\beta=0.5, \gamma=1.0$ ) から推定される $E_2/E_1$ の曲線は分岐することになる。

この結果から、衝突前後の減衰の様子は、 $\Delta t/T$ の値に強く影響されることが分かる。 $\Delta t/T$ が0.1以下のときは、 $E_2/E_1$ が図-3b)に示した曲線上で変化することがわかる。以上より、前節までに述べてきた手法を用いることで、ニューマーク $\beta$ 法に起因する衝突時のエネルギーの減衰

を定量的に評価することができると考えられる。

一方、 $\Delta t/T$ が大きいとき、数値減衰による $E_2/E_1$ が不規則に変化する。この様子を図-6に示す。本図は、時間増分 $5.0 \times 10^4\text{sec}$ の時の数値減衰による高さの変化を時系列で表示したものである。半径が0.1mの場合、1度目の衝突では跳ね返りが大きいものの、2度目の衝突の際にはほとんど跳ね返りがなく、減衰挙動が不規則に変化する。また、半径が0.25mの場合、2度目の衝突までは衝突後に跳ね返るが、3度目の衝突ではほとんど跳ね返りがなくなるという結果となった。これに対して半径が大きな1.0m, 0.5mの場合には、 $\Delta t/T$ が小さくなり減衰挙動が安定している。従来のDDA解析では、ペナルティーばね剛性として衝突する物体の弾性係数に対して1から100倍の値を設定することが多かった<sup>12)</sup>。しかし、このような設定法では、質量が小さい場合でも共通のペナルティーばね剛性を用いることになり、質量が小さい物体の衝突を扱う場合、質量が大きいものに比べ $\Delta t/T$ が大きな範囲で解析行う必要がある。この場合、衝突時に不規則な数値減衰挙動を生じる可能性あり、解析精度を

表-1 半径（質量）を変化させたときの $\Delta t/T$

ペナルティーばね剛性 (kN/m)	$\Delta t$ (sec)	半径(m)	質量(t)	半径(m)	質量(t)	
		1	11.310	0.500	1.414	
1.00E+06		$\Delta t/T$		$\Delta t/T$		
	1.0E-06	4.73E-05	1.34E-04			
	1.0E-05	4.73E-04	1.34E-03			
	5.0E-05	2.37E-03	6.69E-03			
	1.0E-04	4.73E-03	1.34E-02			
	2.5E-04	1.18E-02	3.35E-02			
	5.0E-04	2.37E-02	6.69E-02			
	7.5E-04	3.55E-02	1.00E-01			
	1.0E-03	4.73E-02	1.34E-01			
	2.5E-03	1.18E-01	3.35E-01			
	5.0E-03	2.37E-01	6.69E-01			
	7.5E-03	3.55E-01	1.00E+00			
	1.0E-02	4.73E-01	1.34E+00			
			半径(m)	質量(t)	半径(m)	質量(t)
			0.250	0.177	0.100	0.01131
			$\Delta t/T$		$\Delta t/T$	
1.0E-06		3.79E-04	1.50E-03			
1.0E-05		3.79E-03	1.50E-02			
5.0E-05		1.89E-02	7.48E-02			
1.0E-04		3.79E-02	1.50E-01			
2.5E-04		9.47E-02	3.74E-01			
5.0E-04		1.89E-01	7.48E-01			
7.5E-04		2.84E-01	1.12E+00			
1.0E-03		3.79E-01	1.50E+00			
2.5E-03		9.47E-01	—			
5.0E-03		1.89E+00	—			
7.5E-03		2.84E+00	—			
1.0E-02		3.79E+00	—			

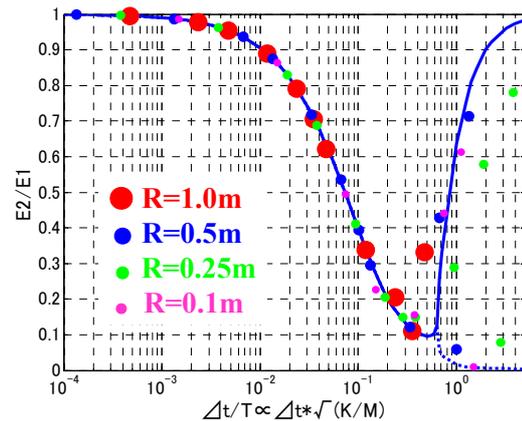


図-5 異なる半径（質量）および時間増分による減衰状態の変化

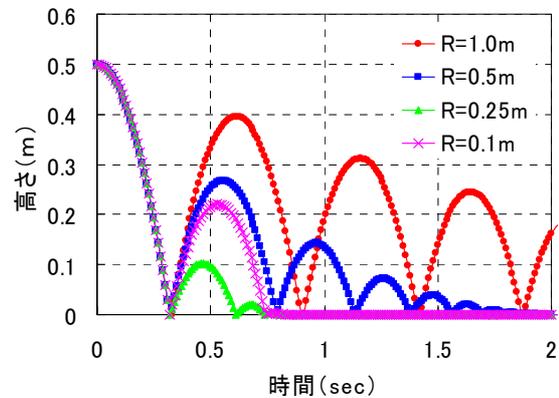


図-6 時間増分 $5.0 \times 10^4\text{sec}$ の時の数値減衰による高さの経時変化

考慮する場合、問題となると考えられる。そこで、次項では、半径が 0.1 m と小さい場合について、ペナルティーばね剛性を変化させることにより、 $\Delta t/T$  が減衰と安定性に与える影響を評価する。

**b) ペナルティーばねおよび時間増分が衝突時の減衰に与える影響**

表-2 は、剛体球半径を 0.1 m として、ペナルティーばね剛性を  $10^8$  kN/m,  $10^6$  kN/m,  $10^4$  kN/m と変化させたときの  $\Delta t/T$  の変化の様子を示している。図-7 は、これらの条件で解析結果を行ったときの数値減衰の様子を示したものである。 $\Delta t/T$  の値が、曲線が分岐する  $\Delta t/T$  よりも小さいとき、特に  $\Delta t/T$  が 0.1 よりも小さいときは、 $E_2/E_1$  が図-3b) に示した曲線上で変化することがわかる。しかし、 $\Delta t/T$  が 0.1 付近から若干のばらつきが生じ始め、特に曲線が分岐する  $\Delta t/T$  より大きい値では解析結果にばらつきが大きくなる。図-8 には、この状況を示すため、時間増分  $5.0 \times 10^{-4}$  sec の時の数値減衰による高さの変化を時系列ごとに示した。この時間増分の時、 $10^8$  kN/m,  $10^6$  kN/m,  $10^4$  kN/m それぞれに対して、1 度目の衝突時の  $E_2/E_1$  は 0.555, 0.441, 0.495 と同程度の減衰が生じる。しかし、 $10^4$  kN/m では 2 度目の衝突以後も安定して減衰していくのに対し、 $10^8$  kN/m,  $10^6$  kN/m では、2 度目の衝突で大きく減衰し、衝突時の減衰が不規則に生じることが分かる。特にペナルティーばね剛性が大きい場合には、全体的に  $\Delta t/T$  が大きくなり、時間増分を小さくとも、衝突時の減衰の状況が不規則に変化する。

このことから、ペナルティーばね剛性は小さな値を用いる方が、解析の安定性が良いと考えられる。ただし、半径 1.0 m で同様の解析を行った際、ペナルティーばね剛性  $10^4$  kN/m では、接触したブロック表面での貫入基準量を超えてしまう結果となった。このことを考慮に入れると、ペナルティーばね剛性は、貫入基準量を超えない範囲で、小さな値を用いることが重要であると考えられる。

表-2 ペナルティーばね剛性を変化させたときの  $\Delta t/T$

質量(t)	$\Delta t$ (sec)	ペナルティーばね(kN/m)	ペナルティーばね(kN/m)	ペナルティーばね(kN/m)
		$\Delta t/T$	$\Delta t/T$	$\Delta t/T$
0.01131	5.0E-07	7.48E-03	7.48E-04	7.48E-05
	1.0E-06	1.50E-02	1.50E-03	1.50E-04
	5.0E-06	7.48E-02	7.48E-03	7.48E-04
	1.0E-05	1.50E-01	1.50E-02	1.50E-03
	5.0E-05	7.48E-01	7.48E-02	7.48E-03
	1.0E-04	1.50E+00	1.50E-01	1.50E-02
	2.5E-04	3.74E+00	3.74E-01	3.74E-02
	5.0E-04	7.48E+00	7.48E-01	7.48E-02
	7.5E-04	1.12E+01	1.12E+00	1.12E-01
	1.0E-03	1.50E+01	1.50E+00	1.50E-01

前項と本項の結果から、衝突前後の減衰の様子は、時間増分、ペナルティーばね、質量といった単独の要素ではなく、これらの組み合わせである  $\Delta t/T$  の値に強く影響されるといえる。減衰挙動に関しては、 $\Delta t/T$  が 0.1 以下のときに  $E_2/E_1$  が図-3b) に示した曲線上で定量的に表される。また、従来のように、ペナルティーばね剛性として物体の弾性係数に対して 1 から 100 倍の値を設定するのではなく、時間増分、質量とのバランスを考慮して設定する必要があるものと考えられる。

また、 $\Delta t/T$  値が大きくなる場合、減衰挙動が不規則に変化するようになる傾向があり、FEM などの振動解析において、ニューマーク  $\beta$  法では  $\Delta t/T < 0.05$  の値をとることが推奨されている点にも対応するものと考えられる。このような不規則な挙動を抑えるためには、 $\Delta t/T$  を小さくすること、すなわち時間増分をある程度小さくし、ペナルティーばね剛性を質量に対して大きくとり過ぎないことが必要であると考えられる。

**(2) ニューマーク  $\beta$  法のパラメータが衝突解析に与える影響**

前節の結果から、通常 DDA で用いられているニューマーク  $\beta$  法の  $\beta=0.5$ ,  $\gamma=1.0$  というパラメータを用いた場合、 $\Delta t/T$  が 0.1 より小さい範囲では、図-3b) の曲線上に

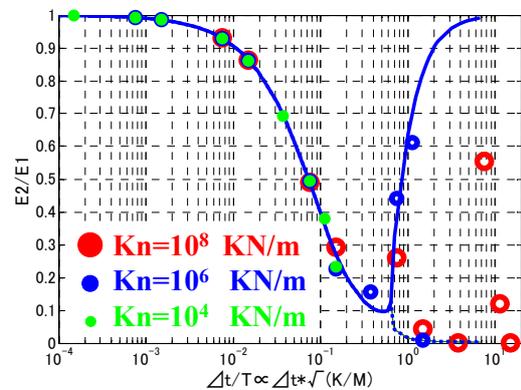


図-7 接触ばね剛性および時間増分による減衰状態の変化

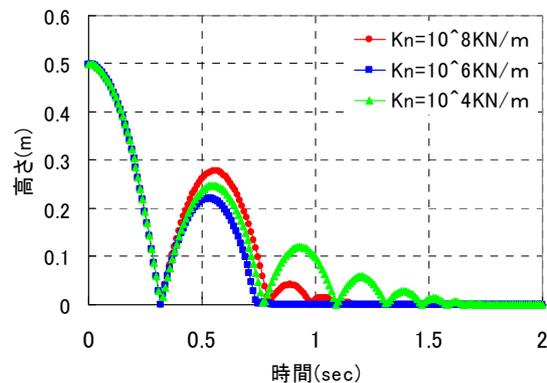


図-8 時間増分  $5.0 \times 10^{-4}$  sec の時の数値減衰による高さの経時変化

$E_2/E_1$ は位置する。一方で、 $\Delta t/T$  値が大きくなる場合、減衰挙動が不規則に変化するようになる傾向があり、これは、FEMなどの動的振動問題において、ニューマーク  $\beta$  法では、 $\Delta t/T < 0.05$  が推奨されている点ともほぼ整合する結果である。このことから、DDA による衝突解析においても、固有周期に対する刻みの個数が解析精度に影響すると考えられる。このことが、その他のニューマーク  $\beta$  法のパラメータ値でも見られるかを本節で検討する。まず、ニューマーク  $\beta$  法のパラメータが安定性と共に衝突時の減衰に与える影響を検討する。その後、比較的安定した結果を得られるパラメータの値を用いて、 $\Delta t/T$  が解析精度に与える影響について検討を行う。

**a) ニューマーク  $\beta$  法における安定性の分類**

ニューマーク  $\beta$  法のパラメータ  $\beta, \gamma$  の値について以下のような領域分けをする。

$$\text{領域(I)} : \gamma \geq \frac{1}{2} \text{かつ} \beta \geq \frac{1}{4} \left( \gamma + \frac{1}{2} \right)^2$$

領域(II) :  $2\beta \geq \gamma \geq \frac{1}{2}$  を満たすが  $\beta \geq \frac{1}{4} \left( \gamma + \frac{1}{2} \right)^2$  を満たさない。

領域(III) : 領域(I), 領域(II)の条件を満たさない。

図-9 は、これらの式を図示したものである。 $\beta, \gamma$  の組が、どの領域に属するかを示したものである。通常  $2\beta \geq \gamma \geq 1/2$  の時無条件安定とされるが、更に  $\beta \geq \frac{1}{4} \left( \gamma + \frac{1}{2} \right)^2$  を満たすときには、図-3b)のように途中で曲線が分岐しない。この条件はより厳密な無条件安定を満たす条件である。この時、パラメータの組が領域(I)に含まれる。 $2\beta \geq \gamma \geq 1/2$  を満たすが  $\beta \geq \frac{1}{4} \left( \gamma + \frac{1}{2} \right)^2$  の条件を満たさない場合は、領域(II)に含まれ、このときは、図-3b)のように途中で曲線が分岐する。通常 DDA で用いられる  $\beta=0.5, \gamma=1.0$  の値のときはこの領域に含まれる。領域

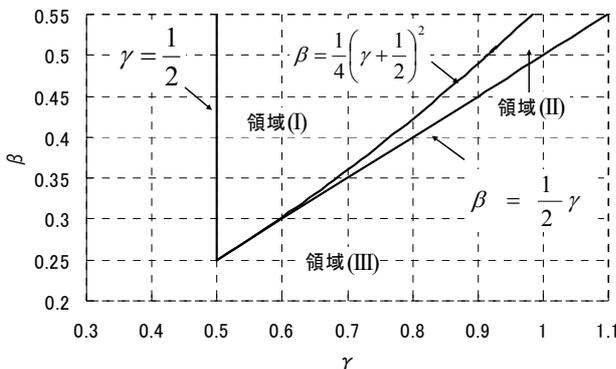


図-9 パラメータによる安定性の領域の分類

(III)では無条件安定条件を満たさず、条件付安定である。

**b) ニューマーク  $\beta$  法のパラメータの感度解析**

ニューマーク  $\beta$  法のパラメータ値が、衝突時の減衰に与える影響を把握するために、パラメータの感度解析を行う。まず、 $\beta$  を 0.5 で固定し、 $\gamma$  の値を変化させた時の様子を図-10a)に示す。 $\gamma=1.0$  のとき、領域(II)に含まれ、曲線は途中で分岐することになる。また、 $\gamma=0.4$  のとき、領域(III)に含まれ、発散する。 $\gamma=0.6, 0.7, 0.8$  の場合には、領域(I)に含まれ、 $\gamma$  の値が大きくなると、衝突前後のエネルギーの比 ( $E_2/E_1$ ) が小さくなる傾向がある。続いて、 $\gamma$  を 0.8 で固定し、 $\beta$  の値を変化させた時の様子を図-10b)に示す。まず、 $\beta=0.25$  のとき、領域(III)に含まれ、 $\Delta t/T$  がある値より大きくなると、 $E_2/E_1$  が急激に増加し発散する。 $\beta=0.4$  のとき、領域(II)に含まれ、曲線は途中で分岐することになる。また、 $\beta=0.4225$  の場合、領域(I)と領域(II)の境界であり、領域(I)に含まれる最小の値である。 $\gamma$  が一定の場合、領域(I)に含まれる範囲では、 $E_2/E_1$  に大きな差は見られない。

**c) ニューマーク  $\beta$  法のパラメータが DDA 解析の安定性及ぼす影響**

ここでは、剛体球 DDA を用いてニューマーク  $\beta$  法のパラメータが、衝突時の減衰および安定性に与える影響

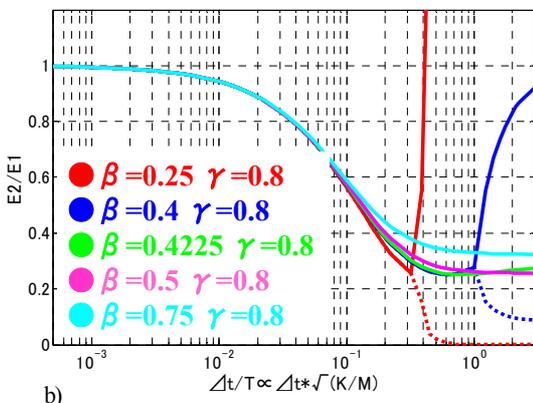
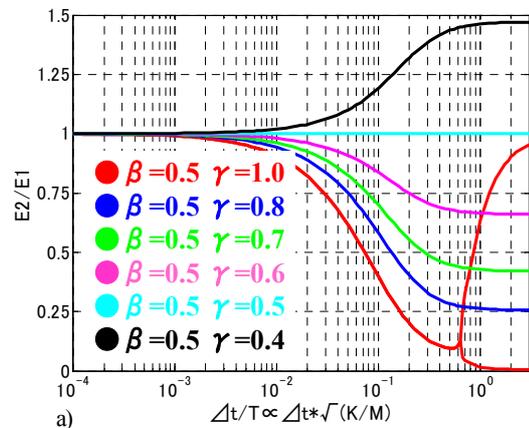


図-10 パラメータの感度解析, a)  $\gamma$  および b)  $\beta$  に関する感度解析

を評価する。解析モデルは、前節で述べたものと同じものを使用し、球体の半径は0.5mの条件で解析を行う。

$\beta=0.4$  で固定し  $\gamma$  を変化させたときの減衰の様子を図-11a)に示す。 $\Delta t/T$  が 0.1 より小さいときには、解析結果の  $E_2/E_1$  が理論値に従うことが分かる。しかし  $\gamma=1.0$  のとき、領域(III)に含まれ、 $\Delta t/T$  がある値より大きくなると、 $E_2/E_1$  が急激に増加し、衝突後のエネルギーが衝突前より大きくなる結果も見られた。また  $\gamma=0.5, 0.6, 0.7, 0.8$  の場合には、領域(I)に含まれ無条件安定の条件を満たすものの、 $\Delta t/T$  が大きくなると、同様の結果が起こりやすい。一般にブロック数が多く、大きさの異なるブロックが混在するような場合の動的解析において、このようなパラメータの組を用いることは好ましくないと考えられる。

次に、 $\beta=0.45$  で固定し  $\gamma$  変化させたときの減衰の様子を図-11b)に示す。 $\gamma=0.9$  のときは、領域(II)と領域(III)の境界にあたる。 $\gamma=0.6, 0.7, 0.8$  のときは、領域(I)に含まれる。 $\gamma=0.7$  の時のみ、衝突後のエネルギーが衝突前より大きくなることはなく比較的安定した解析が行えた。 $\gamma=0.8$  のときは、1 度目の衝突時には、衝突後のエネルギーが衝突前より大きくならなかったものの、時間増分が最も大きい 0.01sec の時には、衝突を繰り返すと衝突後のエネルギーが衝突前より大きくなるがあった。 $\gamma=0.6, 0.9$  のときは、 $\Delta t/T$  が大きいときは、衝突後のエネルギーが衝突前より大きくなった。 $\beta=0.45$  のとき、上述した  $\beta=0.4$  のときよりも衝突後のエネルギーが衝突前より大きくなる割合は小さくなる傾向が確認された。ここでも、 $\Delta t/T$  が 0.05~0.1 より小さい値のときには、曲線状に位置し、数値減衰を定量的に把握できる。

続いて、 $\beta=0.5$  で固定し  $\gamma$  を変化させたときの減衰の様子を図-11c)に示す。 $\gamma=0.4$  のとき、領域(III)に含まれ、衝突後のエネルギーが衝突前より大きくなりやすい。 $\gamma=1.0$  は、通常の DDA で採用されている値であり、このとき、曲線が分岐するあたりから、 $E_2/E_1$  のばらつきが大きくなった。 $\gamma=0.5$  の場合には、領域(I)に含まれ無条件安定の条件を満たし、減衰は非常に少ないものの、衝突後のエネルギーが衝突前より大きくなることもある。また  $\gamma=0.6, 0.7, 0.8$  の場合、領域(I)に含まれ、 $\gamma$  の値が大きくなると、 $E_2/E_1$  が小さくなる傾向があり、衝突後のエネルギーが衝突前より大きくなりならず、比較的安定した解析が行えることがわかる。全般的に  $\gamma$  が小さくなると  $\beta=0.5$ 、 $\gamma=1.0$  の場合よりも減衰が小さくなることがわかる。また、 $\Delta t/T$  が 0.05~0.1 より小さいときには、曲線上に位置し数値減衰を定量的に評価できる。

以上に示した解析は半径 0.5m、ペナルティーばね剛性  $10^6$  kN/m 条件で行ったものであり、この時の解析の安定性について図-12 にまとめた。ただし、図には、上述していないものが数例含まれる。衝突後のエネルギーが

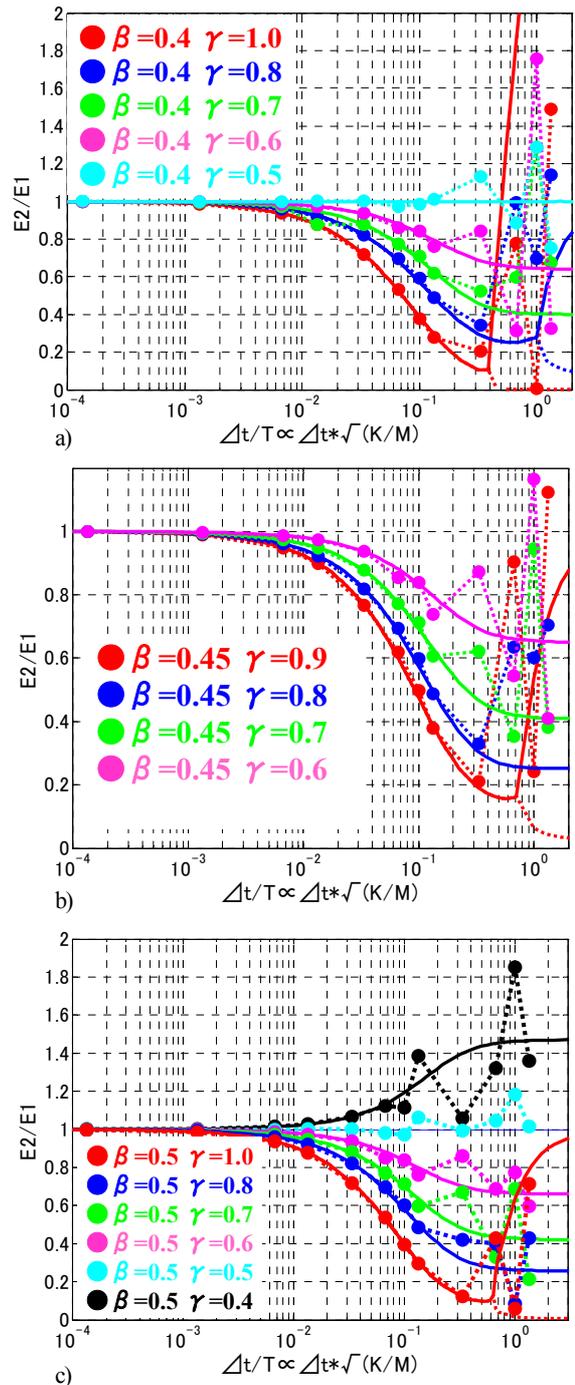


図-11  $\gamma$  を変化させたときの DDA 解析の減衰と解の安定性、a)  $\beta=0.4$ 、b)  $\beta=0.45$  および c)  $\beta=0.5$

衝突前に比べ大きくならなかったものを○で示し、衝突後のエネルギーが衝突前に比べ大きくなったものは×で示している。図-12 から  $\beta$  の値が大きくなると解析の安定性が向上する傾向があることがわかった。

d)  $\Delta t/T$  が解析精度に与える影響

パラメータの組の中でも比較的安定性の良い  $\beta=0.5$  を用いて、 $\Delta t/T$  が解析精度に与える影響について検討を行う。ただし、 $\gamma=0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0$  を用いている。ペナルティ

ばね剛性は、 $1.0 \times 10^5$ ,  $1.0 \times 10^6$ ,  $1.0 \times 10^7$  kN/mを用いて解析を行った。表-3に、剛体球半径を0.5 mとして、ペナルティーばね剛性を  $1.0 \times 10^5$ ,  $1.0 \times 10^6$ ,  $1.0 \times 10^7$ ,  $1.0 \times 10^8$  kN/mと変化させたときの  $\Delta t/T$  の変化を示す。

初めに、ペナルティーばね剛性が  $1.0 \times 10^5$  kN/mの時の解析結果を図-13a)に示す。  $\beta=0.5$ ,  $\gamma=0.6$ の時には、衝突後のエネルギーが衝突前より大きくなることがあったが、全般的に、時間増分  $\Delta t$  が大きくても曲線上に位置し、解析精度が良いことが分かる。また、曲線とのずれが生じ始めるのが、 $\Delta t/T$  が0.2~0.3程度のときであり、このときの時間増分  $\Delta t$  は  $5.0 \times 10^3$  sec~ $7.0 \times 10^3$  sec程度である。

ペナルティーばね剛性が  $1.0 \times 10^6$  kN/mの時の解析結果を図-13b)に示す。  $1.0 \times 10^5$  kN/mの結果に比べ、全体が  $\Delta t/T$  の大きくなる方向に移動する。いずれの結果でも、衝突後のエネルギーが衝突前より大きくなることなく、安定した解析を行うことができた。また、曲線からのずれが生じ始める  $\Delta t/T$  の値は0.05~0.2程度である。このときの時間増分  $\Delta t$  は  $5.0 \times 10^4$  sec~ $1.0 \times 10^5$  sec程度であり、 $1.0 \times 10^5$  kN/mの場合よりも小さい値となっている。

ペナルティーばね剛性が  $1.0 \times 10^7$  kN/mの時の解析結果を図-13c)に示す。  $1.0 \times 10^5$  kN/m,  $1.0 \times 10^6$  kN/mの結果に比べ、さらに  $\Delta t/T$  が大きくなる方向に移動する。いずれの結果でも、衝突後のエネルギーが衝突前より大きくなることなく、安定した解析を行うことができた。このとき、曲線からのずれが生じ始める  $\Delta t/T$  の値は0.1~0.2程度である。このときの時間増分  $\Delta t$  は、 $2.5 \times 10^4$  sec~ $5.0 \times 10^4$  sec程度であり、 $1.0 \times 10^6$  kN/mの場合と同程度か小さい値となる。

ペナルティーばね剛性が  $1.0 \times 10^8$  kN/mの時の解析結果を図-13d)に示す。この場合も同様の傾向があり  $\Delta t/T$  の値は0.1~0.2程度の時に曲線からのずれが生じ始めた。この時の時間増分  $\Delta t$  は、 $1.0 \times 10^4$  sec程度であり  $1.0 \times 10^5$  kN/mの場合に比べ1オーダー以上の差がある。この様にペナルティーばね剛性が質量に対して大きいときは、時間ステップを小さく取る必要があり、解析の効率が悪くなると考えられる。 $\Delta t/T$  がこの値より小さい値のときは曲線上に位置し定量的に数値減衰を把握することができる。また、 $1.0 \times 10^8$  kN/mの場合、 $\Delta t/T$  が大きい場合に、衝突後のエネルギーが衝突前より大きくなることもあり不安定であった。

以上の解析結果から、ニューマーク  $\beta$  法のパラメータを変化させた場合においても、 $\Delta t/T$  の値が0.05よりも小さい範囲では、曲線上に位置し、定量的に数値減衰を評価することができ、解析精度が良いことが分かる。また、 $\Delta t/T$  が0.05~0.2より大きくなると、曲線からのずれが生じ始め数値減衰が不規則になり、解析精度が悪くなるこ

とが分かった。これは、時間増分が小さい場合でも、 $\Delta t/T$  の値がこの範囲にあれば不規則になっており、FEMなどの動的振動問題において、ニューマーク  $\beta$  法では、 $\Delta t/T < 0.05$  が推奨されている点ともほぼ整合する結果であり、DDAを用いて落石のような衝突解析を行う場合も、 $\Delta t/T < 0.05$  の値を用いることが良いと考えられる。

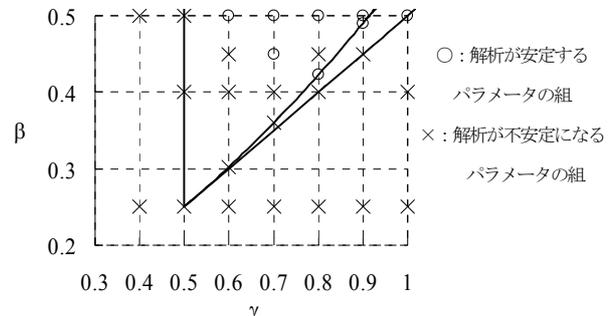


図-12 半径0.5mペナルティバネ剛性  $10^6$  kN/mでのニューマーク  $\beta$  法の安定性

表-3 ペナルティーばね剛性および時間増分による減衰状態の変化

質量(t)	$\Delta t$ (sec)	ペナルティーばね (kN/m)	ペナルティーばね (kN/m)
		$\Delta t/T$	$\Delta t/T$
1.414	$1.0E-06$	$4.23E-05$	$1.34E-04$
	$1.0E-05$	$4.23E-04$	$1.34E-03$
	$5.0E-05$	$2.12E-03$	$6.69E-03$
	$1.0E-04$	$4.23E-03$	$1.34E-02$
	$2.5E-04$	$1.06E-02$	$3.35E-02$
	$5.0E-04$	$2.12E-02$	$6.69E-02$
	$7.5E-04$	$3.17E-02$	$1.00E-01$
	$1.0E-03$	$4.23E-02$	$1.34E-01$
	$2.5E-03$	$1.06E-01$	$3.35E-01$
	$5.0E-03$	$2.12E-01$	$6.69E-01$
	$7.5E-03$	$3.17E-01$	$1.00E+00$
$1.0E-02$	$4.23E-01$	$1.34E+00$	
質量(t)	$\Delta t$ (sec)	ペナルティーばね (kN/m)	ペナルティーばね (kN/m)
		$\Delta t/T$	$\Delta t/T$
1.414	$1.0E-06$	$4.23E-04$	$1.34E-03$
	$1.0E-05$	$4.23E-03$	$1.34E-02$
	$5.0E-05$	$2.12E-02$	$6.69E-02$
	$1.0E-04$	$4.23E-02$	$1.34E-01$
	$2.5E-04$	$1.06E-01$	$3.35E-01$
	$5.0E-04$	$2.12E-01$	$6.69E-01$
	$7.5E-04$	$3.17E-01$	$1.00E+00$
	$1.0E-03$	$4.23E-01$	$1.34E+00$
	$2.5E-03$	$1.06E+00$	$3.35E+00$
	$5.0E-03$	$2.12E+00$	$6.69E+00$
	$7.5E-03$	$3.17E+00$	$1.00E+01$
$1.0E-02$	$4.23E+00$	$1.34E+01$	

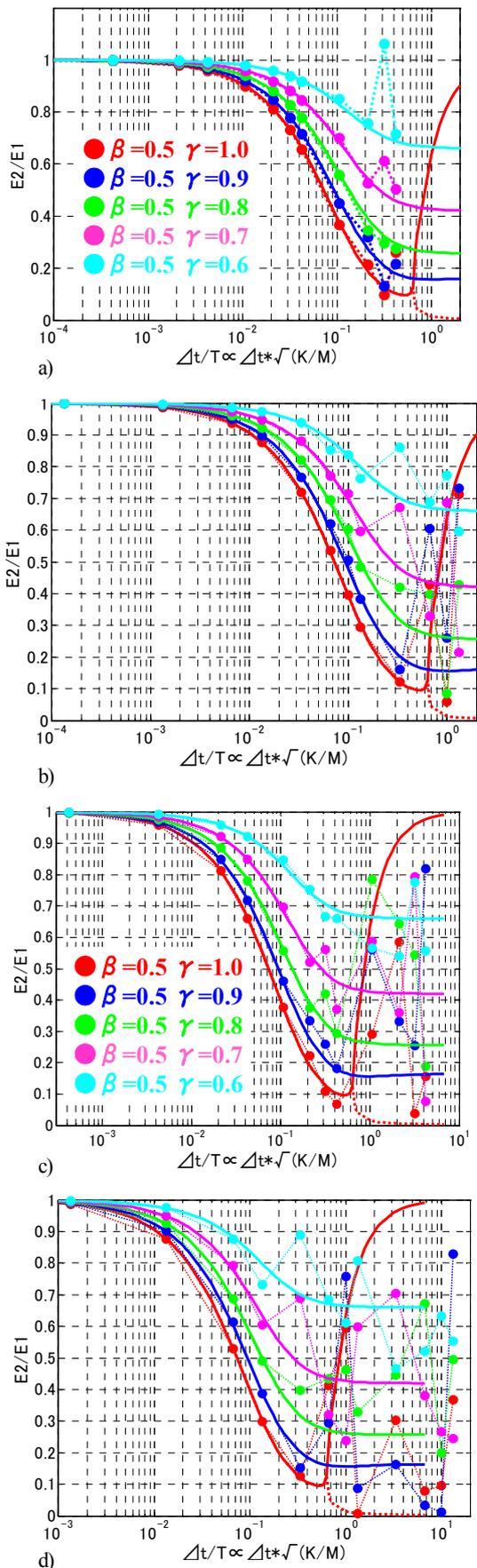


図-13 ペナルティーばね剛性を変化させた時の DDA 解析における減衰と解の安定性, a)  $1.0 \times 10^5 \text{ kN/m}$ , b)  $1.0 \times 10^6 \text{ kN/m}$ , c)  $1.0 \times 10^7 \text{ kN/m}$ , d)  $1.0 \times 10^8 \text{ kN/m}$

e) 数値減衰と速度エネルギー比

これまでの結果より、数値減衰が  $\Delta t/T$  に依存し、 $\Delta t/T < 0.05$  の時には解析精度が良いことが分かった。しかし、 $\Delta t/T < 0.05$  の値を用いた場合にも依然、数値減衰が存在し、落石解析を行う場合には、数値減衰による影響により、解析精度が悪くなると考えられる。ただし、速度エネルギー比による衝突時のエネルギー損失と、数値減衰の影響を分離することができれば解析精度を確保できるものと考えられる。このためには、数値減衰を定量的に把握できることが前提となる。前節までに述べてきたように、 $\Delta t/T < 0.05$  の範囲では、DDA の衝突解析における数値減衰が  $\Delta t/T$  との関係から定量的に評価できることを述べてきた。本節では、速度エネルギー比による衝突時のエネルギー損失と、数値減衰の影響を分離することによる利点について述べる。すなわち、ニューマーク  $\beta$  法による数値減衰の分を理論的に事前に把握することができれば、衝突時の純粋な物理的なエネルギー損失と分離して影響を評価することができる。

ここでは、数値減衰に起因するエネルギーの減衰を、速度エネルギー比に補正をかけることで、物理的なエネルギー損失分と捕らえ、目標とする衝突時のエネルギー損失を解析できるかを検討する。なお、速度エネルギー比は以下のように補正を行う。

(補正係数)

$$= \left( \frac{1}{\text{ニューマーク}\beta\text{法から予測される } E_2/E_1} \right)$$

(補正後の速度エネルギー比)

$$= (\text{設定したい速度エネルギー比}) \times (\text{補正係数})$$

(37)

ここでは、衝突前後のエネルギー比が 0.5 となることを目標とした場合の解析を行う。比較のため、従来の設定方法で解析を行った場合と、補正を行った場合の結果を表-4 にまとめる。図-14 には、時間増分  $2.5 \times 10^4 \text{ sec}$  のときの補正をしない場合とする場合の衝突前後の高さの変化を示す。また目安として、 $\Delta t/T < 0.05$  を満たす時間増分は、 $\Delta t = 3.74 \times 10^4 \text{ sec}$  より小さい場合である。なお解析は、通常 DDA で用いられているパラメータ値、 $\beta = 0.5$ 、 $\gamma = 1.0$  を用いて解析を行っている。表-4 および図-14 から  $\Delta t/T < 0.05$  を満たす範囲では速度エネルギー比に補正することにより、目標とするエネルギー損失量を表現することが分かる。ただし、 $\Delta t/T < 0.05$  を満たす値より少し大きい値でも、補正を行うことにより、目標とするエネルギー損失量での解析を行うことが可能である。ここで示したように、速度エネルギー比による衝突時のエネルギー損失と、数値減衰の影響を分離することにより、落石解析における解析精度の向上を図ることが可能であると考えられる。

表-4 補正前後の解析結果の比較

$\Delta t$ (sec)	$\Delta t/T$	数値減衰	補正係数	補正後の速度エネルギー比	補正後の $E_2/E_1$	補正前の $E_2/E_1$
1.0E-06	1.34E-04	0.999	1.001	0.501	0.500	0.499
1.0E-05	1.34E-03	0.987	1.013	0.507	0.500	0.493
5.0E-05	6.69E-03	0.936	1.068	0.534	0.500	0.468
1.0E-04	1.34E-02	0.876	1.141	0.571	0.501	0.440
2.5E-04	3.35E-02	0.720	1.388	0.694	0.500	0.362
5.0E-04	6.69E-02	0.526	1.900	0.950	0.509	0.270
7.5E-04	1.00E-01	0.394	2.538	1.269	0.500	0.198
1.0E-03	1.34E-01	0.304	3.288	1.644	0.425	0.186
2.5E-03	3.35E-01	0.120	8.308	4.154	0.384	0.075
質量(t)	1.414	ペナルティーばね(kN/m)		1.00E+06		

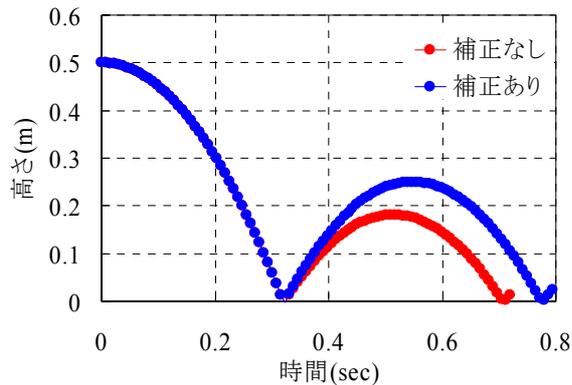


図-14 補正前後の衝突後の高さの変化

#### 4. おわりに

DDA に用いられているニューマーク  $\beta$  法に起因した数値減衰特性のために、現在の方法では、斜面へ衝突する際のエネルギー損失を正確に評価できないことがわかった。このため、本論文では、数値減衰が衝突挙動に与える影響を定量的に評価する手法について整理を行った。これにより、DDA による衝突時の数値減衰特性評価することが可能となった。また、三次元剛体球 DDA を用いて一次元場での衝突解析を行い、現在使われているニューマーク  $\beta$  法のパラメータ ( $\beta=0.5, \gamma=1.0$ ) での衝突時の減衰特性について述べ、さらに、ニューマーク  $\beta$  法のパラメータの数値減衰特性と安定性に与える影響を評価した。以下に本章で得られた知見について述べる。

ニューマーク  $\beta$  法の減衰特性を把握し、DDA 解析での 1 次元場における物体の衝突挙動に与える影響を定量的に評価する手法について整理を行った。これにより、減衰特性は、 $\Delta t/T$  が 0.05 より小さい場合、このパラメータにより一意に決まることが明らかになった。

また、 $\Delta t/T$  が大きくなる場合、衝突時の減衰量が不規則に変化しやすく、解析精度に信頼性がないものと考えられる。 $\Delta t/T$  の逆数は、振動 1 周期に対する刻みを表し

ており、 $\Delta t/T$  が大きいときは、接触時に挿入されるペナルティーばねが振動する固有周期に対して、十分な時間増分の数を設定できないことに起因するものと考えられる。

不規則な挙動を示さないようにするためには、時間増分を小さくすること、ペナルティーばね剛性を質量に対して大きくとり過ぎないようにすることが必要である。そこで、従来の DDA 解析で用いているように、弾性係数に対して 1 から 100 倍の値をペナルティーばね剛性として設定する手法ではなく、 $\Delta t/T$  を基準とした設定法が必要であると考えられる。これに関しては、ニューマーク  $\beta$  法を用いた動的振動解析で推奨されているように、 $\Delta t/T < 0.05$  となるように設定することが望ましいものと考えられる。

$\Delta t/T < 0.05$  の範囲では、今回実施した解析でも減衰挙動が不規則にならず、定量的に減衰挙動を把握できる。この範囲であれば、落石解析での速度エネルギー比と、数値減衰を分離して評価することができると考えられる。速度エネルギー比と、数値減衰を分離して評価することにより、衝突時に生じるエネルギー損失を精度よく解析することができるようになるものと考えられる。

#### 参考文献

- 1) Shi, G. H. and Goodman, R. E.: Two dimensional discontinuous deformation analysis, *Int. J. Numer. Anal. Method Geomech.*, Vol. 9, pp. 541-556, 1985.
- 2) Shi, G. H. and Goodman, R. E.: Generallization of two-dimensional discontinuous deformation analysis for forward modeling, *Int. J. Numer. Anal. Method Geomech.*, Vol. 13, pp. 359-380, 1989.
- 3) Wang, C. Y., Chuang, C. C., and Sheng, J.: Time integration theories for the DDA method with finite element meshes, *Proc. of the 1st International Forum on Discontinuous Deromation Analysis (DDA) and Simulations of Discontinuous Media*, Berkeley, California, M.R. Salami and D. Vanks, eds., TSI Press, pp.263-286, 1996.
- 4) O'Sullivan, H., and Bray, D.: A Comparative evaluation of two approaches to discrete element modeling of particulate media, *Int. Proc. of the 4th Conference on Analysis of Discontinuous Deformation (ICADD-4)*, pp.97-110, 2001.
- 5) Doolin, D. M. and Sitar, N.: Time Integration in Discontinuous Deformation Analysis, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 130, No. 3, pp. 249-258, 2004.
- 6) Ishikawa, T., Miura, S., and Ohnishi, Y.: Influence of input parameters on energy loss in free fall tests with DDA, *Int. Proc. of the 7th Conference on Analysis of Discontinuous Deformation (ICADD-7)*, pp. 147-158, 2005.
- 7) Wu, J. H.: Numerical Analysis of Discontinuous Rock Masses Using Discontinuous Deformation Analysis, Ph.D. thesis, Kyoto University, 2003.
- 8) Maclaughlin, M., Sitar, N., Doolin, D. and Abblot, T.: Investigation of slope-stability kinematics using discontinuous deformation analysis, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, Vol. 38, pp. 753-762, 2001.

- 9) Doolin, D.M. and Sitar, N.: Accuracy of the DDA method with respect to a single sliding block, *Rock Mechanics in the National Interest*, Elsworth, Tinucci and Heasley, eds, pp. 1429-1435, 2001.
- 10) Hughes, T.J.R.: Analysis of transient algorithms with particular reference to stability behavior, *Computational Methods for Transient Analysis*, T. Belytschko and T.J.R. Hughes, eds., Elsevier Science, Amsterdam, 1983.
- 11) 日本機械学会編：数値積分法の基礎と応用，コロナ社，2003.
- 12) 日本計算工学会編，大西有三，佐々木猛，Shi, G.H.著：不連続変形法（DDA），計算力学レクチャーシリーズ 6，丸善，2005.

(2009. 5. 7 受付)

## A STUDY ON THE CHARACTERISTICS OF NUMERICAL DAMPING IN DISCONTINUOUS DEFORMATION ANALYSIS (DDA)

Tomofumi KOYAMA, Tetsuya FUKAWA, Satoshi NISHIYAMA and Yuzo OHNISHI

In the DDA, the contact spring are introduced between the blocks contacting each other to prevent the penetration of the blocks but the dashpots are not usually introduced unlike DEM. However, it is well known that the numerical damping caused by numerical integration occurs during the simulations. In this study, the characteristics of numerical damping caused by Newmark  $\beta$  method in DDA was investigated using simple 1-D free oscillation problem. The 1-D collision problem was analysed using DDA with 3-D rigid sphere block and sensitivity analysis for the parameters related to Newmark  $\beta$  method was carried out. The effect of these parameters on the numerical stability and accuracy was also discussed. From the analytical results, in DDA, the calculation time step,  $\Delta t$  and natural frequency,  $T$  should satisfy the condition of  $\Delta t/T < 0.05$  to obtain the results with good accuracy. To evaluate the energy loss correctly when the two blocks collide each other, the effect of numerical damping and velocity ratio should be considered separately.