The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics

有限要素電磁場解析における反復法とその周辺技術

岩下 武史　美舩 健　高橋 康人

1 はじめに

電磁場解析は様々な電気機器，電子デバイスの設計や電気的現象の分析等の目的で広く利用されている．電磁場解析には様々な手法が用いられるが，現在最も一般的な方法は辺要素を用いた有限要素法である．有限要素解析は，一般に大規模な疎行列を係数行列とする連立一次方程式の求解に帰着し，電磁場問題でも同様である．この連立一次方程式の求解部分は解析全体の計算時間の大部分を占めるため，その高速化は重要であり，これまでに様々な手法の検討が行われている．本論文では，電磁場有限要素解析における反復法に関する著者らの最近の取り組みを紹介する．

有限要素電磁場解析においては，磁気ベクトルポテンシャルを未知数とするA-法と磁気ベクトルポテンシャルと電気スカラポテンシャルを未知数とする

[筆者紹介]

いわした たけし．1993年京都大学工学部電気工学科卒業．1998年同大学大学院工学研究科電気工学専攻博士課程修了．博士(工学)．1998年同大学院工学研究科リサーチ・アソシエイト(日本学術振興会未来開拓学術研究推進事業PD)，2000年同大学大型計算機センター助手を経て，2003年より同大学学術情報メディアセンター助教授(2007年職名変更により同准教授)，現在に至る．高性能計算，線形反復法，電磁界解析，並列処理に関する研究に従事．IEEE，SIAM，日本応用数理学会，情報処理学会，電気学会，日本AEM学会，日本計算工学会各会員．

みふね たけし．1998年京都大学工学部電気系学科卒業．2000年同大学大学院工学研究科電気工学専攻修士課程修了．2003年同大学院工学研究科電気工学専攻博士後期課程修了，同年より同大学院工学研究科助教，現在に至る．電磁界解析，線形反復法に関する研究に従事する．京都大学博士(工学)．IEEE会員．

たかはし やすひと．2003年早稲田大学理工学部電気電子情報工学科卒業．2005年，同大学大学院理工学研究科修士課程修了．2008年，同大学院理工学研究科博士後期課程修了．博士(工学)．2006年，早稲田大学理工学術院助手．2008年より京都大学大学院情報学研究科特定助教．主として，電磁エネルギー機器設計のための高速大規模数値解析技術に関する研究に従事．2005年，2008年電気学会優秀論文発表賞受賞．IEEE，電気学会各会員．

NII-Electronic Library Service

The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics

A-ϕ法が存在する．A-法では辺要素のみが用いられるのに対し，A-ϕ法では節点要素も併用される．ここで，従来から経験的にA-ϕ法による定式化を用いた方が得られる連立一次方程式に対する反復法(主にICCG：Incomplete Cholesky Conjugate Gradient 法[11]，ICCOCG：Incomplete Cholesky Conjugate Orthogonal Conjugate Gradient 法[18])の収束性がよく，未知変数の総数が多くなるトレードオフを考慮しても全体の計算時間が短くなることが知られてきた[2]．本現象は静磁場解析や準定常場解析(渦電流解析)の他，高周波電磁場解析でも報告されている[1]．そこで，Igarashi, H., Honma, T. は有限要素電磁場解析において生ずる係数行列を固有値，条件数の観点から研究し，A-ϕ法で得られる係数行列がA-法による場合と比較して条件数等において良条件で，その結果反復法の収束性が高いことを示した[4]．これらの研究に対して，著者らは，電磁場解析における Hiptmair, R. の Hybrid smoother[3] とマルチグリッド法における Coarse grid correction の解法プロセスの類似性に着目する一方で，Hybrid smoother と A-ϕ法の誤差修正効果に関する類似性を指摘することから，Explicit/implicit error correction methods とよぶ新しい解法フレームワークを確立した[5]～[7][9][15]．この解法フレームワークにより，Hybrid smoother と A-ϕ法がそれぞれ互いに対応する Explicit error correction(EEC)法および Implicit error correction(IEC)法であることが示される．また，数値実験によりA-ϕ法により得られる連立一次方程式に反復法を適用した場合，Hybrid smoother が陽的に除去する誤差成分の収束が速いことが示された．本数値実験結果はEEC/IEC法のフレームワークで記述される2種類の方法が互いに関連性を持ち，同様の誤差修正効果をもつことを示すものである．同フレームワークの詳細とこれらの研究成果について2節で述べる．

次に，本論文では Folded preconditioning[13][14] と呼ぶ新しい反復法の前処理技術を紹介する．著者らのこれまでの実験的な経験，文献調査によると，2節で述べるIEC法が良好に機能する多くの事例において，A-ϕ法にみられるように係数行列が特異となる．この特異性は，EEC/IEC法のフレームワークにおいて誤差修正のための行列に関する条件として記述できる．一方，同条件が成り立つ場合，IEC法にある特定の反復法を適用した場合の求解プロセスと対応するEEC法の求解プロセスが一致する．この場合，当然のことながら両者の収束性は等しいが，一般的にEEC法の方が求解に要する計算時間(計算量)が少なくて済む．これはIEC法はEEC法と比べて未知変数が多いことに起因している．しかしながら，IEC法では得られた連立一次方程式にあらゆる(前処理付き)反復法を適用することができ，これがIEC法の長所であるが，これらの求解プロセスの多くはEEC法の解法として記述することができない．そこで，著者らは本課題についてさらに検討した結果，一般の特異な

NII-Electronic Library Service

The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics

連立一次方程式に対して，一部の冗長な未知数を除去して縮約した連立一次方程式にFolded preconditioningと呼ぶ特殊な前処理を施すことにより，元の連立一次方程式に対してあらゆる前処理付きクリロフ部分空間反復法を適用した場合と等価な求解プロセスを得られることを示した．また，具体的ないくつかの事例においてFolded preconditioningの実装がEEC法と同程度の計算量で可能となることを示した．Folded preconditioningの詳細は文献[13]に述べられているが，本論文ではその簡単な紹介とその応用例を3節に示す．

次に，4節において，上記のFolded preconditioningの一つとして解釈できるA-ϕ block前処理[17]を紹介する．本手法は有限要素電磁場解析において利用可能な前処理技術で，従来法と比べて数値計算例で約45%程度の計算時間の短縮が得られている．

2 Explicit/implicit error correction methods

2.1 EEC法とIEC法

解くべきn元連立一次方程式を以下のように与える．

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{n\times n}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^{n}, \quad \boldsymbol{b} \in \mathbf{C}^{n}. \tag{1}$$

この連立一次方程式を反復法により解く際に，以下の二つの手続きにより現在の近似$\tilde{\boldsymbol{x}}$を$\tilde{\boldsymbol{x}}^{new}$に更新する方法をExplicit error correction method(EEC法)と呼ぶ．一番目の手続きは以下の式により修正ベクトル$\boldsymbol{y}$あるいはその近似値$\tilde{\boldsymbol{y}}$を求めることにより与えられる．

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{d}(\tilde{\boldsymbol{x}}). \tag{2}$$

ここで，係数行列$\boldsymbol{C}$は元の係数行列とは異なった正方行列で，その次元数をmとする．また，右辺ベクトルはその時点での近似解$\tilde{\boldsymbol{x}}$の関数で与えられる．二番目の手続きは次式により与えられる近似解の更新である．

$$\tilde{\boldsymbol{x}}^{new} \longleftarrow \tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}\tilde{\boldsymbol{y}}. \tag{3}$$

ここで，行列$\boldsymbol{B}$は$n\times m$の行列である．

上記のEEC法に対応して，著者らはImplicit error correction method(IEC法)を提案している．同手法は，式(1)(2)を同時に解くアイデアと，式(3)を式(1)の解ベクトル$\boldsymbol{x}$が$\hat{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{y}}$の形で記述されると解釈することにより導出される．但し，$\hat{\boldsymbol{x}}$および$\hat{\boldsymbol{y}}$はそれぞれn次元，m次元ベクトルである．まず，式(1)は以下のように書き換えられる．

$$\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{b}. \tag{4}$$

次に式(2)について考える．ここで，ほとんどのEEC法では式(2)は制約された誤差方程式で与えられるため，右辺ベクトルは残差ベクトル$\boldsymbol{r}$により$\boldsymbol{D}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}})$のように書ける．これを式(2)に代入し，

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{b} \tag{5}$$

を得る．ベクトル$\tilde{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}$を$\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}$にそれぞれ書き換え，式(4)(5)を連立させると，

NII-Electronic Library Service

The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics

最終的にIEC法において解く連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{DA} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} \\ \hat{\boldsymbol{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{Db} \end{pmatrix} \tag{6}$$

が得られる．IEC法では，式(1)を解く代わりに式(6)を解く．この際，式(1)の解は $\hat{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{y}}$ により与えられる．式(6)は前処理付き反復法で解かれるが，適切に $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ を選択することで，式(6)の係数行列は元の係数行列 $\boldsymbol{A}$ と比べて条件数等の点でより良好な性質を備え，式(1)をそのまま解く場合と比べて高い収束性が期待できる．なお，実応用上IEC法が良好に機能するほとんどの例について $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{DAB}$ と書けることが分かっており，この場合式(6)の係数行列は特異となる†1．ただし，式(6)の右辺ベクトルの性質から連立一次方程式は不能とはならず，複数の解をもつ．また，これらの複数の解から導出される $\hat{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{y}}$ はすべて同一で，元の方程式(1)の唯一解†2となる．

2.2 A-ϕ 法と Hybrid smoother の関係

本小節では，準定常場の時間領域での解析について述べる．A-法における基礎方程式は次式で与えられる．

$$\nabla\times(\nu\nabla\times\vec{A}_m)+\sigma\frac{\partial\vec{A}_m}{\partial t}=\vec{J}_0. \tag{7}$$

ここで，$\vec{A}_m, \nu, \sigma, t, \vec{J}_0$ はそれぞれ磁気ベクトルポテンシャル，磁気抵抗率，導電率，時間，励起電流密度である．右辺ベクトルの励起電流密度は $\nabla\cdot\vec{J}_0=0$ を満たすものとする．一方，A-ϕ 法の基礎方程式は以下の通りである．

$$\nabla\times(\nu\nabla\times\vec{A'}_m)+\sigma\frac{\partial(\vec{A'}_m+\nabla\phi)}{\partial t}=\vec{J}_0, \tag{8}$$

$$\nabla\cdot\left(\sigma\frac{\partial(\vec{A'}_m+\nabla\phi)}{\partial t}\right)=0. \tag{9}$$

ここで，$\vec{A'}_m$ は磁気ベクトルポテンシャルで ϕ は(電気)スカラポテンシャル†3である．

式(7)に辺要素を用いたガラーキン法と時間後退差分法を適用すると，A-法において解くべき連立一次方程式が以下のように与えられる．

$$\boldsymbol{K}_A\boldsymbol{x}_A=\left(\boldsymbol{C}_u{}^T\boldsymbol{M}_\nu\boldsymbol{C}_u+\frac{\boldsymbol{M}_\sigma}{\Delta t}\right)\boldsymbol{x}_A=\boldsymbol{b}_A. \tag{10}$$

但し，Δt は時間ステップ幅で，$\boldsymbol{x}_A$ は磁気ベクトルポテンシャルを表す未知変数ベクトル，右辺ベクトル $\boldsymbol{b}_A$ は前回のタイムステップ時の磁気ベクトルポテ

†1 但し，人工的な問題において，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{DAB}$ を満たさない $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ により係数行列の条件数を改善できる例が存在することが分かっている．

†2 元の方程式(1)の係数行列が正則の場合．

†3 通常の電気スカラポテンシャルを Φ とした場合 $\Phi=\frac{\partial\phi}{\partial t}$ である．

NII-Electronic Library Service

The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics

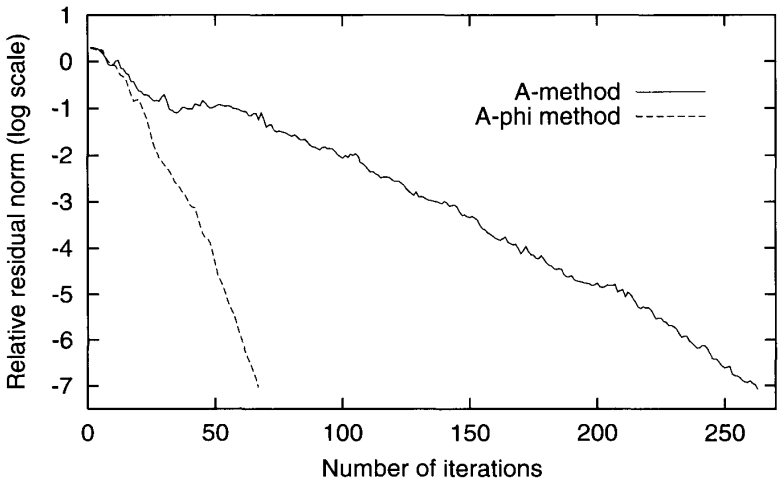

図1 A-法と A-ϕ 法における残差の収束過程の比較

ンシャルと励起電流で決まる項である．また，$\boldsymbol{C}_u$ は離散化された curl オペレータであり，$\boldsymbol{M}_\nu$ および $\boldsymbol{M}_\sigma$ は解析モデルパラメータにより決まる正値な行列である．ここで，連立一次方程式(10)に Hybrid smoother の誤差修正を適用することを考える．同スムーザは EEC 法の一種であり，EEC 法の記述形式によれば，

$$\boldsymbol{C} = \frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{M}_\sigma\boldsymbol{G}, \tag{11}$$

$$\boldsymbol{d}(\tilde{\boldsymbol{x}}_A) = \boldsymbol{G}^T(\boldsymbol{b}_A - \boldsymbol{K}_A\tilde{\boldsymbol{x}}_A), \tag{12}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{G} \tag{13}$$

となる．ここで，$\tilde{\boldsymbol{x}}_A$ は $\boldsymbol{x}_A$ の近似解であり，$\boldsymbol{G}$ は離散化された gradient オペレータで，$\boldsymbol{C}_u\boldsymbol{G}=\boldsymbol{0}$ の関係がある．EEC 法に対しては対応する IEC 法を考えることができ，式(6) (10) (11) (12) (13)から直ちに，

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{K}_A & \frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{M}_\sigma\boldsymbol{G} \\ \frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{M}_\sigma & \frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{M}_\sigma\boldsymbol{G} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}_A \\ \hat{\boldsymbol{y}}_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_A \\ \boldsymbol{G}^T\boldsymbol{b}_A \end{pmatrix} \tag{14}$$

が得られる．ここで，適切な初期条件の設定の下で，式(14)と A-ϕ 法の基礎方程式(8) (9)を離散化して得られる連立一次方程式は同一となる．即ち，A-ϕ 法は Hybrid smoother に対応した IEC 法であるということができる．そこで，A-ϕ 法と Hybrid smoother が同様の誤差修正効果を持っているかどうか数値実験により検証した．検証モデルには TEAM(Testing Electromagnetic Analysis Method) workshop problem 10[16] を使用する．**図1** に，ICCG 法を用いた場合の A-法および A-ϕ 法の収束性の比較を示す．**図1** に見られるように A-ϕ 法が収束性の点で優れていることがわかる．次に，Hybrid smoother が除去する誤差である導電性領域の離散化された curl オペレータの Null 空間 Ker(curl) に属する誤差 $\boldsymbol{e}_g$ の振る舞いについて調べる[8]．**図2** に本誤差

NII-Electronic Library Service

The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics

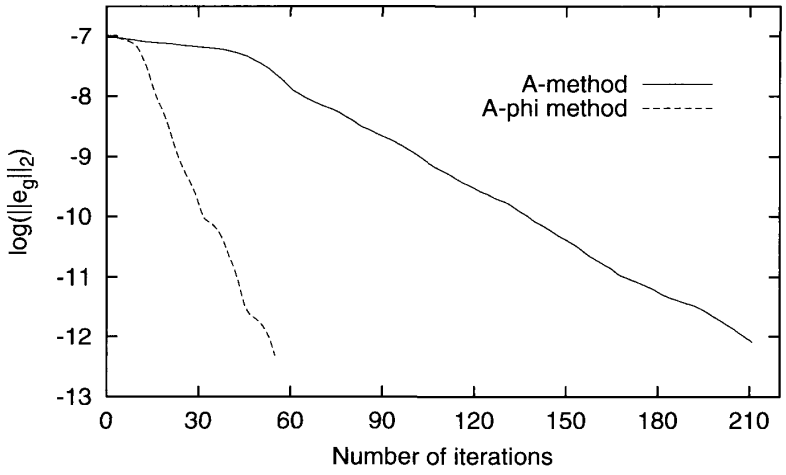

図2 導電性領域における curl の Null 空間に属する誤差の振る舞いの比較

成分の A-ϕ 法，A-法における収束性を示す．**図2**より，Ker(curl)に属する誤差成分の収束が A-ϕ 法では速く，その結果 A-法と比較して高い収束性を得ていることがわかる．即ち，A-ϕ 法(IEC 法)は対応する Hybrid smoother (EEC 法)と同様の誤差修正効果を得ていることがわかる．本研究成果は A-ϕ 法の良好な収束特性に関する物理的な解釈を初めて与えるものである[8]．なお，本小節で述べた A-ϕ 法と Hybrid smoother の関係(IEC/EEC)は周波数領域での解析や高周波電磁場解析においても同様に成立する．

3 Folded preconditioning

3.1 Folded preconditioning の概要

前節で述べた IEC 法において特定の反復法を適用した場合，その解法プロセスは対応する EEC 法と同一となる．例えば，2.2節で扱った A-ϕ 法により生ずる連立一次方程式(14)をガウス＝ザイデル(GS)法で解くプロセスは，A-法により生ずる連立一次方程式(10)に Hybrid smoother を適用した解法プロセスと一致し，収束性は同一となる．この他にも，IEC 化したマルチグリッド法である陰的マルチグリッド法において対称 GS 法を適用することは，通常の V(1, 1)サイクルのマルチグリッド解法と同一の求解プロセスとなる[6]．ここで重要な点は，EEC 法と IEC 法の両者が同一の収束性を有する場合，EEC 法の方が計算量の上で有利となる点である．これは，IEC 法により生ずる式(6)の係数行列の非対角成分に関する計算によるもので，直感的には IEC 法では未知変数が冗長化されておりその数が多いためと考えてよい．しかしながら，例えば電磁場解析の主流解法である A-ϕ 法において ICCG 法や ICCOCG 法を使用した解法プロセスは EEC 法の書式では記述できない．そこで，本課題について研究した結果，著者らは Folded preconditioning とよぶ前処理を考案した．一般の特異な連立一次方程式(IEC 法)に対して，冗長な未知変数を除去し縮約した連立方程式を生成した場合においても，本前処理を適用すれば収

NII-Electronic Library Service

The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics

束性の悪化を防ぐことができる．紙面の都合上，Folded preconditioning に関する重要な定理の証明とその導出の詳細は文献[13]に譲ることとし，本論文ではそれらの定理と同前処理の簡単な紹介を行う．

本節では，特異な係数行列を持つ連立一次方程式を対象とする．本連立一次方程式は適切な順序付けを行うことで，IEC 法で扱った以下のような形に変換できる．

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{DA} & \boldsymbol{DAB} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} \\ \hat{\boldsymbol{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{Db} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{n\times n}, \quad \boldsymbol{B} \in \mathbf{C}^{n\times m}, \quad \boldsymbol{D} \in \mathbf{C}^{m\times n}. \tag{15}$$

但し，次元数 n は式(15)の係数行列の階数以上であるとする．ここで，式(15)を前処理付きクリロフ部分空間反復法(左前処理行列 $\boldsymbol{M}_1$，右前処理行列 $\boldsymbol{M}_2$ とする)で解くことを考えた場合，k 反復後の近似解は以下のように書ける．

$$\begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{x}}^{(k)} \\ \bar{\boldsymbol{y}}^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{x}}^{(0)} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} + \boldsymbol{v}^{(k)}, \tag{16}$$

$$\boldsymbol{v}^{(k)} \in \mathrm{span}\{\boldsymbol{Mr}_l^{(0)}, \boldsymbol{MA}_l\boldsymbol{Mr}_l^{(0)}, \cdots, \boldsymbol{M}(\boldsymbol{A}_l\boldsymbol{M})^{k-1}\boldsymbol{r}_l^{(0)}\}. \tag{17}$$

ここで，上添え字の括弧内数は反復数を表し，$\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}$ は $\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}$ の近似解，$\boldsymbol{v}^{(k)}$ は $(n+m)$ 次元ベクトル，$\boldsymbol{A}_l, \boldsymbol{r}_l$ は式(15)の係数行列と残差ベクトル，$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_2^{-1}\boldsymbol{M}_1^{-1}$ である．また，$\hat{\boldsymbol{y}}$ の初期解 $\bar{\boldsymbol{y}}^{(0)}$ は $\boldsymbol{0}$ としている．ここで，本解法プロセスを式(1)の $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ の求解プロセスとしてみた場合，k 反復後の式(1)に対する近似解ベクトル $\tilde{\boldsymbol{x}}^{(k)} = \bar{\boldsymbol{x}}^{(k)} + \boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{y}}^{(k)}$ は以下のように書ける．

$$\tilde{\boldsymbol{x}}^{(k)} = \bar{\boldsymbol{x}}^{(k)} + \boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{y}}^{(k)} = \tilde{\boldsymbol{x}}^{(0)} + \boldsymbol{u}^{(k)}, \tag{18}$$

$$\boldsymbol{u}^{(k)} \in \mathrm{span}\{\boldsymbol{M}_f\boldsymbol{r}^{(0)}, \boldsymbol{M}_f\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}_f\boldsymbol{r}^{(0)}, \cdots, \boldsymbol{M}_f(\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}_f)^{k-1}\boldsymbol{r}^{(0)}\}. \tag{19}$$

但し，

$$\boldsymbol{M}_f = \boldsymbol{M}_{11} + \boldsymbol{M}_{12}\boldsymbol{D} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{M}_{21} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{M}_{22}\boldsymbol{D}, \tag{20}$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{M}_{11} & \boldsymbol{M}_{12} \\ \boldsymbol{M}_{21} & \boldsymbol{M}_{22} \end{pmatrix} \tag{21}$$

である．ここで，式(18)(19)をみると，これは式(1)を前処理行列として $\boldsymbol{M}_f^{-1}$ を用いて解く前処理付きクリロフ部分空間反復法そのものである．そこで，式(1)に対する本前処理を Folded preconditioning(以後，FP と表す)と呼ぶ．FP を用いることにより，式(15)を解く場合と同一の解の探索空間(クリロフ部分空間)を得ることができる．

ここで，式(17)(19)において，部分空間内から近似解を構成する $\boldsymbol{v}^{(k)}, \boldsymbol{u}^{(k)}$ を定める手法について各種の反復法が存在する．基礎反復法として CG 法や BiCG 法，COCG 法，COCR 法を用いる場合には，式(1)に対して FP を使用するのみで式(15)を解く場合と同一の解法プロセス(収束性)を得る．一方，

NII-Electronic Library Service

The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics

GMRES 法や BiCG-STAB 法を用いる場合，同一の解法手順を得るには基礎反復法のアルゴリズムを若干修正する必要がある†4．ただし，このような基礎反復法を用いる場合でも単純に FP を前処理として使用する方法で実用上問題は少ない(収束性は同程度である)と考えられる．

上記で述べたように FP を用いれば，式(15)を解く場合と同等の収束性を式(1)を解く場合でも実現できる．そこで両者の計算時間の比較は，1 反復に要する計算時間により決まる．クリロフ部分空間反復法で行われる行列・ベクトル積計算，内積計算，ベクトルの更新については，未知変数の数が少ない式(1)を FP により解く方法が有利である．一方，前処理部については，一般的な実装法により FP を利用する場合，式(15)を解く場合と比べて，行列 $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{D}$ に関する行列・ベクトル積各々1 回と n 次元ベクトルの加算 1 回が余分に必要となる．しかしながら，いくつかの前処理手法や特定の $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{D}$ に対しては効率のよい FP に関する計算方法が提案されており，この場合前処理における付加的な演算は必要とされず，全体の求解時間の上で FP を用いる方が有利となる．具体的な例では，2.2 節で扱った A-ϕ 法による式(14)を ILU(0) または IC(0) 分解前処理付きクリロフ部分空間反復法で解く場合には，対応する FP の前処理部を効率よく計算する方法が考案されており，式(10)を FP で解く方が計算時間の点で有利となる[13]．

3.2 数値実験例

本小節では Folded preconditioning(FP) に関する数値実験による検証例として，誘電体装荷型方形導波管を対象とした有限要素解析に関する計算結果を示す．本テストモデルは高周波問題であり，複素数による解析となる．解析は Xeon X5472 プロセッサを搭載した PC 上で行った．式(15)の形式で記述できる A-ϕ 法により得られる連立一次方程式を直接解く場合と，式(1)に対応する A-法により得られる連立一次方程式に対して FP を用いる場合の比較を行う．基礎反復法としては COCG 法を用い，前処理には IC(0) 分解前処理を用いる．**図 3** に両手法における相対残差の収束履歴を示す．丸め誤差の影響による差異が見られるが，両者の収束性は一致しており，前節で述べた等価な収束性が FP により実現できることを示している．次に，反復法の打ち切り基準を相対残差の 10^{-8} とした場合の計算時間の比較を**表 1** に示す．まず，A-ϕ 法による式(15)と A-法による式(1)を ICCOCG で解く場合の比較では，A-ϕ 法で解く場合の方が優っており，2 節で述べた議論の通りである．これに対して，FP による ICCOCG を用いた場合，A-ϕ 法の場合と同一の収束性が実現されており，計算時間は約 10～17% 短縮されている．本モデルの場合，一般的な FP

†4 例えば，右前処理付き GMRES 法を例にとると，解を探索するクリロフ部分空間は同一となるが，最小化の対象となる残差ノルムが異なる．

NII-Electronic Library Service

The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics

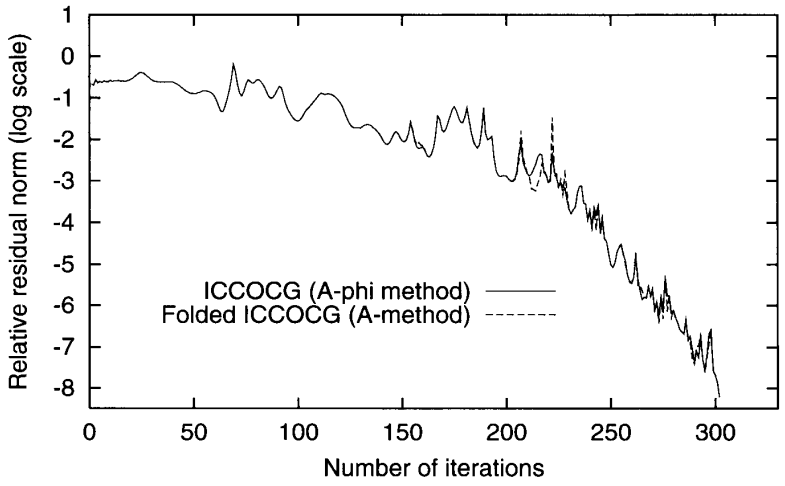

図3 A-ϕ 法における ICCOCG 法と A-法における Folded ICCOCG 法の残差収束における等価性

表1 反復回数と計算時間の比較

解 法	ICCOCG (A-法)	ICCOCG (A-ϕ法)	Folded ICCOCG (A-法，一般的実装法)	Folded ICCOCG (A-法，改良実装法)
反復回数	1772	302	302	302
時間(sec)	265.5	98.8	89.4	81.8

の実装においても良好な解析結果が得られているが，上記で言及した IC 前処理に対する効率的な FP の実装法を用いることでさらに計算時間が短縮される．

上記の実験例で示したように，IEC 法等によって得られる特異な連立一次方程式に対して，経験的知見あるいは網羅的な数値実験に基づいて最も有効な前処理付き反復法が見出された場合，FP を利用することにより収束性を劣化させることなく冗長な未知変数を除去することができ，計算時間の短縮を図ることができる．

4 A-ϕ block 前処理

4.1 A-ϕ block 前処理の導出とその手順

2, 3 節で述べた EEC/IEC 法や Folded preconditioning は電磁場解析において重要な意味を持つもののそれ自体は一般的な連立一次方程式に対して記述されているものであり，電磁場解析に限定されるものではない．一方，本小節で述べる A-ϕ block 前処理は有限要素電磁場解析において有効性を持つ本問題領域に特化した前処理で，Folded preconditioning の一つであり，EEC 型前処理の一つと捉えることもできる．

A-ϕ block 前処理では，まず A-ϕ 法により得られる連立一次方程式を考え，これを Additive Schwarz 前処理で解く．この際，ベクトルポテンシャルとスカラポテンシャルの各々を二つの部分領域に対応させる．また，各部分領域内

NII-Electronic Library Service

The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics

の解法にはIC(0)分解を用いる．ここで，有限要素電磁場解析で得られる係数行列はそのままではIC分解できないことが多く，通常シフト付きIC分解が用いられる．ここで，A-ϕ block 前処理において重要な点は，ベクトルポテンシャルに対応する係数行列のIC分解で用いるシフト量に比して，スカラポテンシャルに対応する係数行列で用いるシフト量を小さくすることである．準定常場解析における具体例で言えば，式(14)における行列 $\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{M}_\sigma\boldsymbol{G}$ は離散化されたラプラシアンであり，シフトなし，あるいは0.01程度の十分に小さいシフト量でIC分解が可能である．次に，Folded preconditioningを用いて，上記の式(15)に対するAdditive Schwarz前処理付き反復法と等価な縮約した方程式(1)に対する解法プロセスを得る．ここで，Additive Schwarz前処理では式(15)の非対角部分行列は前処理に使用しないため，式(20)中の $\boldsymbol{M}_{12}$, $\boldsymbol{M}_{21}$ は零行列となり，FPの実装は容易である．準定常場解析の場合，A-ϕ block 前処理の手順は以下のように行われる．まず，行列 $\boldsymbol{K}_A$ と $\boldsymbol{K}_\phi=\frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{M}_\sigma\boldsymbol{G}$ のシフト付きIC(0)分解が以下のように与えられるとする．

$$\boldsymbol{L}_A\boldsymbol{L}_A{}^T \simeq \boldsymbol{K}_A+\gamma_A\cdot diag(\boldsymbol{K}_A), \tag{22}$$

$$\boldsymbol{L}_\phi\boldsymbol{L}_\phi{}^T \simeq \boldsymbol{K}_\phi+\gamma_\phi\cdot diag(\boldsymbol{K}_\phi). \tag{23}$$

ここで，$diag(\ \ )$ は行列の対角成分を表す．このとき，前処理 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{M}_f\boldsymbol{r}$ は以下の手順で行われる．

$$\boldsymbol{z}_A = \boldsymbol{L}_A{}^{-T}\boldsymbol{L}_A{}^{-1}\boldsymbol{r}, \tag{24}$$

$$\boldsymbol{y}_\phi = \boldsymbol{L}_\phi{}^{-T}\boldsymbol{L}_\phi{}^{-1}\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{r}, \tag{25}$$

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}_A+\boldsymbol{G}\boldsymbol{y}_\phi. \tag{26}$$

式(25)(26)の手順はEEC法として記述できるため，A-ϕ block 前処理はHybrid smoother 前処理[15]と同様にEEC型前処理とみなすことができる．

4.2 性能評価

A-ϕ block 前処理が従来法(A-ϕ 法においてICCG法やICCOCG法を用いる)と比べて優位となるかどうかは，Additive Shwardz型の前処理としたために式(15)における非対角部分行列を無視したことによる収束性の劣化がどの程度になるかに依存する．収束性の変化が著しくない場合には，非対角部分行列に関する計算量の削減とFPによる未知変数の削減により計算時間は短縮される．

著者らは文献[17]に示すように高周波問題，準定常場問題，非線形問題をあわせて，6例の数値実験を行っている．これらの数値実験では，A-ϕ block 前処理における収束性の劣化は最大で7%程度に抑えられており，6例中4例では同等，もしくはむしろA-ϕ block 前処理の方がよい収束性を得ている．これは前小節で述べたように，A-ϕ block 前処理においてスカラポテンシャルに対応するシフト量 γ_ϕ を小さくした効果によると考えられる．これらの収束

NII-Electronic Library Service

The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics

性に対する結果により，全ての数値計算例で A-ϕ block 前処理は計算時間の観点で従来法より優位となり，3節で述べた誘電体装荷型方形導波管の例では，約 45% の計算時間の短縮に成功している．

5 おわりに

本論文では，著者らの最近の提案である EEC/IEC 法のフレームワーク，Folded preconditioning，A-ϕ block 前処理を紹介した．反復法における誤差を修正する方法である EEC 法に対して IEC 法を導出し，IEC 法が対応する EEC 法と同様の誤差修正効果を示すことを数値実験により示した．次に，IEC 法等により得られる一般の特異な連立一次方程式を対象とする Folded preconditioning を提示した．同前処理を用いることにより，収束性を劣化させることなく冗長な未知変数を除去することが可能となる．数値実験により，同前処理が有する等価な収束性を確認した．最後に，本論文では Folded preconditioning の電磁場有限要素解析における適用例といえる A-ϕ block 前処理について述べた．同手法により，電磁場有限要素解析で主流の A-ϕ 法を ICCG 法(実問題)や ICCOCG 法(複素問題)で解く場合と比べて，最大で 45% の計算時間の短縮を実現した．A-ϕ block 前処理付き反復法はその有用性から，すでに商用電磁場解析ソフトウェアに線形ソルバとして採用されるに至っている[20]．

本論文のまとめは以上であるが，以下に実応用事例における EEC/IEC 法のフレームワーク，Folded preconditioning の活用法について付記する．まず，EEC 法のフレームワークで記述できる方法は数種あり，既に多くの応用分野で利用されている[19]．そこで，これらの EEC 法に着目し，対応する IEC 法の連立一次方程式を得ることができる．また，IEC 法の式(15)における行列 $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{D}$ を直接的に求める方法も適用可能である[10][12]．こうして得られた IEC 法の連立一次方程式に対して，反復法ライブラリを適用し，最も有効な手法を見出す．次に，得られた前処理付き反復法に対して Folded preconditioning を適用し，冗長な未知変数を除去し，計算時間の点で最も有用と考えられる手法を得る．このように，最終的には Folded preconditioning(または EEC 法)を利用した求解コードが最も有効性が高いと考えられる．しかし，これらの手法における前処理部分の実装については現時点でライブラリ化されておらず，多数の前処理手法に対して試験的に個別のプログラムを作成するのは利用者にとって負担が大きい．一方，IEC 法で得られる連立一次方程式に対して，既存の前処理付き反復法をライブラリを通じて適用することは極めて容易で，解法選択のための網羅的な調査がより簡便にできる．従って，IEC 法の利用によりまず有効な解法を見出し，その後 Folded preconditioning により最終的な求解プログラムを作成することが最も有効な手段であると著者らは考えてい

NII-Electronic Library Service

The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics

る.

[参考文献]

[1] Edlinger, R. D. and Biro, O., A joint vector and scalar potential formulation for driven high frequency problems using hybrid edge and nodal finite element, IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 44(1996), 15-23.

[2] Fujiwara, K., Nakata, T. and Ohashi, H., Improvement of convergence characteristic of ICCG method for the A-ϕ method using edge elements, IEEE Transactions on Magnetics, 32(1996), 804-807.

[3] Hiptmair, R., Multigrid method for Maxwell's equations, SIAM Journal on Numerical Analysis, 36(1998), 204-225.

[4] Igarashi, H. and Honma T., On convergence of ICCG applied to finite element equation for quasi-static fields, IEEE Transactions on Magnetics, 38(2002), 565-568.

[5] 岩下武史, 美舩健, 島崎眞昭, 新しいマルチレベル型反復解法：陰的マルチグリッド法の概念, 情報処理学会研究報告, 2006-HPC-107(2006), 151-156.

[6] 岩下武史, 美舩健, 島崎眞昭, 新しいマルチグリッド解法：陰的マルチグリッド法の基礎概念, 情報処理学会論文誌：コンピューティングシステム, 48, SIG 8(ACS 18)(2007), 1-10.

[7] Iwashita, T., Mifune, T. and Shimasaki, M., Similarities between implicit correction multigrid method and A-phi formulation in electromagnetic field analysis, IEEE Transactions on Magnetics, 44(2008), 946-949.

[8] Iwashita T., Mifune T., Moriguchi, S. and Shimasaki, M., Physical meaning of the advantage of A-phi method in convergence, IEEE Transactions on Magnetics, 45(2009), 1424-1427.

[9] 岩下武史, 美舩健, 島崎眞昭, Explicit and implicit error correction methods の基礎概念, 京都大学数理解析研究所講究録, 1638(2009), 18-27.

[10] Kameari, A., Improvement of ICCG convergence for thin elements in magnetic field analyses using the finite-element method, IEEE Transactions on Magnetics, 44(2008), 1178-1181.

[11] Meijerink, J. and van der Vorst, H. A., An iterative solution method for linear systems of which the coefficient matrix is a symmetric M-matrix, Mathematics of Computation, 31(1977), 148-162.

[12] Mifune, T., Moriguchi, S., Iwashita, T. and Shimasaki, M., Convergence acceleration of iterative solvers for the finite element analysis using the implicit and explicit error correction methods, IEEE Transactions on Magnetics, 45(2009), 1104-1107.

[13] Mifune, T., Takahashi Y. and Iwashita, T., Folded preconditioner : a new class of preconditioners for Krylov subspace methods to solve redundancy-reduced linear systems of equations, IEEE Transactions on Magnetics, 45(2009), 2068-2075.

[14] 美舩健, 高橋康人, 岩下武史, A-ϕ 法における冗長未知数 ϕ の消去がもたらす反復収束性悪化の解消—冗長未知数の利用と同等な新しい前処理：Folded Preconditioning—, 平成21年電気学会静止器・回転機合同研究会, SA-09-13, RM-09-13(2009), 69-74.

[15] 森倫也, 用水邦明, 岩下武史, 小林英一, 阿部眞, 高周波電磁界辺要素有限要素解析のための前処理付き反復法, 電子情報通信学会論文誌 C, J 89-C(2006), 521-528.

[16] Nakata, T., Takahashi, N. and Fujiwara, K., Summary of the results for benchmark problem 10(steel plates around a coil), Compel, 11(1992), 335-344.

[17] 高橋康人, 美舩健, 岩下武史, 金澤正憲, 不完全コレスキー分解と EEC 法に基づく新たな前処理による A 法の高速化, 平成20年電気学会静止器・回転機合同研究会, SA-08-61, RM-08-68(2008), 71-76.

[18] van der Vorst, H. A. and Melissen, J. B. M., A Petrov-Galerkin type method for solving $Ax=b$ where A is symmetric complex, IEEE Transactions on Magnetics, 26(1990), 706-708.

[19] Wesseling, P., An introduction to multigrid methods, John Wiley & Sons Ltd., 1992. Corrected Reprint. Philadelphia, PA : R. T. Edwards, Inc., 2004.

[20] http://www.jmag-international.com/

[**Abstract**]

This paper introduces three techniques that the authors have recently proposed in the area of iterative solvers. The first is a new framework of an explicit and implicit error correction method for error correction in linear iterative solvers. The second technique is folded preconditioning, a

NII-Electronic Library Service

The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics

technique based on an important theorem about Krylov subspace methods applied to a singular linear system. This technique can reduce redundant unknowns of a singular linear system without any degradation of convergence. The third is A-phi block preconditioning. This technique is a type of folded preconditioning and is specially designed for finite element electromagnetic field analyses. A numerical test confirms that the proposed method reduces computational time for a high-frequency electromagnetic field problem by 45%.

NII-Electronic Library Service